



TITLE:

# 動光弾性実験の地盤内の波動挙動 解析への適用性に関する基礎的研 究( Dissertation\_全文 )

AUTHOR(S):

佐藤, 誠

---

CITATION:

佐藤, 誠. 動光弾性実験の地盤内の波動挙動解析への適用性に関する基礎的研究. 京都大学, 1989, 工学博士

ISSUE DATE:

1989-07-24

URL:

<https://doi.org/10.14989/doctor.r6934>

RIGHT:

動光弾性実験の  
地盤内の波動挙動解析への  
適用性に関する基礎的研究

1989年1月

佐 藤 誠

動光弾性実験の  
地盤内の波動挙動解析への  
適用性に関する基礎的研究

1989年 1月

佐 藤 誠

目 次	
第1章 序 論	1
1. 1. 緒 言	1
1. 2. 波動研究と動光弾性実験の歴史	3
1. 2. 1. 波動研究史の概観	3
1. 2. 2. 動光弾性実験史の概観	5
1. 3. 本研究の目的と内容	8
1. 3. 1. 目的と範囲	8
1. 3. 2. 内 容	9
第2章 平面波動論	10
2. 0. 緒 言	10
2. 1. 平面波伝播理論	11
2. 1. 1. 無限弾性媒体内の波動	11
2. 1. 2. 平面波	13
2. 1. 3. 半無限弾性体の平面調和波	16
2. 1. 4. 平面自由境界の波動応答	19
2. 1. 5. 表面波 (Rayleigh Wave)	29
2. 2. 平行多層弾性体の平面調和波動	33
2. 2. 1. 二つの半無限弾性体が接合された場合	33
2. 2. 2. 平行多層弾性体の調和P波およびSV波	41
2. 2. 3. 平行多層弾性体の調和SH波	49
2. 3. 平行多層地盤の解析例	56
2. 3. 1. 多層地盤例	56
2. 3. 2. 多層地盤にS波が垂直入射する場合	57
2. 3. 3. 多層地盤へSV波が任意角度で入射する場合	58
2. 4. 結 論	64
第3章 動光弾性実験	67
3. 0. 緒 言	67
3. 1. 光弾性実験法	68
3. 1. 1. 光弾性実験の原理	68



3. 1. 2. 光弾性実験装置と測定法	70
3. 2. 動光弾性実験法と装置	73
3. 2. 1. 動光弾性問題の分類と波動	73
3. 2. 2. 高速動光弾性実験装置	75
3. 2. 3. 超高速カメラによる動光弾性実験装置	76
3. 2. 4. 繰り返し入力法による動光弾性実験装置	79
3. 3. 光弾性模型材料	82
3. 3. 1. 模型材料の選定	82
3. 3. 2. エポキシ樹脂模型材料の種類	82
3. 4. 動光弾性実験の入力波形と等色線縞模様	84
3. 4. 1. 入力波形と基準模型	84
3. 4. 2. 等色線縞模様	87
3. 5. 結 論	92
第4章 地盤模型に対する動光弾性実験	93
4. 0. 緒 言	93
4. 1. 地盤模型	94
4. 1. 1. 均質地盤模型	94
4. 1. 2. 非均質地盤模型	95
4. 2. 等色線縞模様写真による波動挙動解析	97
4. 2. 1. 入射SV波が臨界角を越えない直線自由境界模型の場合	97
4. 2. 2. 平行非均質層模型の場合	98
4. 2. 3. スリットを有する地盤模型の場合	99
4. 2. 4. スリットを充填した非均質地盤模型の場合	105
4. 2. 5. 直角二等辺三角形の突起を持つ地盤模型の場合	107
4. 2. 6. 段差のある不整形な地盤模型の場合	108
4. 2. 7. 曲線境界の非均質地盤模型の場合	112
4. 3. 自由境界への平面入射SV波と表面波	115
4. 4. 結 論	118
第5章 波動伝播問題の数値シミュレーション	120
5. 0. 緒 言	120
5. 1. 差分法による数値シミュレーション	121
5. 1. 1. 支配方程式	121

5. 1. 2. 境界条件	121
5. 1. 3. 差分解析モデルと解析条件	124
5. 1. 4. 均質モデルの差分表示	125
5. 1. 5. 非均質モデルの差分表示	132
5. 1. 6. 安定性の条件	133
5. 2. 差分法による数値シミュレーション結果と考察	136
5. 2. 1. 均質解析モデルの結果	136
5. 2. 2. 非均質解析モデルの結果	140
5. 3. 結 論	144
第 6 章 結 論	146
参考文献	151
謝 辞	156

# 第 1 章 序 論

## 第 1 節 緒 言

わが国は世界有数の地震多発地帯に囲まれ、しかも近い将来、大都市圏に近接した地域に震源を持つ大地震が発生する可能性があると考えられている。最近では国内において1983年5月の日本海中部地震(M 7.7)、国外において1985年9月のメキシコ地震(M 8.1)による悲惨な被害は記憶に生々しい。

近年、特に社会的、経済的、文化的要請から高層建築物、長大橋梁、高架高速道路橋などの大型重要構造物、広い範囲にわたり無数に設置されたライフラインと呼ばれる施設網、および原子炉施設あるいは石油・天然ガスなどの地下備蓄タンクなどのように、一旦破損が発生すると社会の極めて広い範囲にしかも長期間にわたって脅威を及ぼす恐れのある構造物が多数建設されつつある。

したがって、地震に対する災害対策が緊急課題であり、そのためには地震波を含めて地盤内の波動伝播挙動を明らかにすることが、工学的に極めて重要であることは多言を要しないであろう。

現在の科学技術では地震発生そのものを制御することができない以上、大地震による災害に備えて地震予知および災害防止対策が緊急の課題として取り上げられ、関連する各分野の多数の研究者が英知を結集して問題解決に努力しているのが現状である。

地震は古来人知の及ばぬ現象として畏怖されると同時に、一方では原因とメカニズムを究明すべき興味ある対象としても科学の発達史の中で重要な位置を占めてきた。そこでは、地震は地殻内部の一定領域で突然発生した乱れが波動として地表に伝播・到達する現象であることが明らかにされると、数理力学的には固体内の波動伝播問題として究明され、工学的には建造物の様々な条件に対して波動挙動と安全対策が解明され、地球物理学的には地球の内部構造および地殻運動の機構が追求され、それぞれの成果はそれらの段階に応じて人類の社会生活に貢献してきた。

しかし、1904年にH. Lamb が地震波伝播の理論的基礎を築いて以来80年以上になるが、上記の地震災害が現実には発生しているように、工学的な面に限っても地震に伴う地盤と構造物の震動挙動の的確な把握あるいは耐震対策など、解決すべき問題は依然広く残されている。

次節に示すように、波動および振動問題についての理論的研究は、数理力学分野の著名な研究者の精力的な探求により加速度的に発展し、現在も枚挙にいとまが無いほど多数の成果が発表されている。

また、工学的には1950年代から実用化され始めたコンピュータが、進歩・大型化される時代に有限要素法などの数値解析法も体系化・実用化され、波動問題の解明が飛躍的に発展した。さらに最近では境界積分方程式法<sup>1-1)</sup>などの優れた数値解析法も一般化され、

一層発展する趨勢にある。また、数値シミュレーション結果を表現する手段としての画像処理技術と機器が進歩し、この分野の研究に拍車をかけている。

しかしながら、理論的または数値シミュレーションによる解は、必ずなんらかの仮定の上に成り立っており、現実の現象を忠実に表現しているかどうかについて検証する必要がある。そのためには実験的研究が理論的研究と相携えて遂行されなければならない。両者は車の両輪のごとくであり、実験的研究が理論を検証するにとどまらず未知の現象を発見することも希ではない。科学史の過去においてそうであったように現在においてもこの関係は引き継がれているはずである。

実験的に振動・波動現象を研究する分野においては、電子的計測機器および新しい検出素子などの目ざましい発達・発見により、容易に精密な波動測定が可能になると同時にAE測定<sup>1-2)</sup>など新しい分野への波動の応用が可能となっている。しかし、後で述べるような波動の諸特性に由来するいくつかの制限により、困難な課題がなお残されている。

また、波動は典型的には地震として経験されているが、地表および地中の人工的な発生源からの波動現象、たとえば、発破、車両交通、工事現場などからの地盤振動および音波などの波動にも共通する現象である。近年加速度的に進行している都市の過密化にともない、市民生活における環境保護が重視される中で、これらの波動現象が公害の問題として社会的・日常的に重要な課題となってきた。このように地震以外の原因による振動および波動に関係する困難な問題も急激に増加している。

## 第1章 第2節 波動研究と動光弾性実験の歴史

### 1. 2. 1. 波動研究史の概観

波動と振動現象についての研究の歴史は数百年に遡る。以下に弾性波動問題についての象徴的で主要な発展を年代順に並べる<sup>1-3, 4, 5, 6, 7, 8)</sup>。

- B.C.6世紀： Pythagorasが楽音の源と弦の振動を研究した。
- 1636： M. Mersenneが弦の振動について最初の正しい理論を発表した。
- 1638： G. Galilei が振子の振動，共鳴現象，弦の振動に影響する因子を述べた。
- 1660： R. Hooke が弾性体の応力と歪の間の関係を公式化した。
- 1678： C. Huygens が光の反射と屈折に関するHuygens の原理を発表した。
- 1686： I. Newtonが水面の波の早さと空気中の音の早さを調べた。
- 1700： Sauveurが引張った弦の振動数を計算した。
- 1713： G. Taylorが弦の振動に対する完全な動的解を求めた。
- 1744： L. Euler(1744) とD. Bernoulli(1751) がはりの振動の式を導き，種々の境界条件に対する固有モードを得た。
- 1747： J. D'Alembertが弦の運動方程式を導き，初期値問題を解いた。
- 1755： D. Bernoulli が重ね合わせの原理を導き，それを弦の振動に応用した。
- 1759： J. Lagrangeが弦を離散化した質点系として解いた。
- 1766： L. Euler がベルの振動を曲がりはりの挙動を基に解析した。  
J. Bernoulli(1789) もまたこの問題の解析を試みた。
- 1802： E. Chladni がはりの振動と棒の縦およびねじり振動の実験的研究を報告した。
- 1815： Madam S. Germainが板の振動の式を導いた。
- 1821： C. Navierが弾性体の運動方程式を導いた。
- 1822： A. Cauchyが固体に対する運動方程式を含む弾性論を展開した。
- 1828： S. Poisson が弾性体内の波動伝播を研究し，縦波と横波の2種類の波が存在することを理論的に示した。Cauchy(1830) が同じ結果を得た。
- 1829： Poissonが棒の振動に対する近似理論を展開した。
- 1831： Poissonおよび M. Ostrogradskyが単振動解を合成して初期値問題を解いた。
- 1849： G. Stokesが物体力による弾性波を最初に研究した。
- 1852： G. Lamé がNavier の運動方程式の解はスカラーポテンシャルの勾配とベクトルポテンシャルの回転の和で表せることを示した。
- 1862： A. Clebschが固有モードを用いて固体の自由振動の一般論を発表した。
- 1872： J. Hopkinsonが線材の塑性波伝播の最初の実験を行った。
- 1876： L. Pochhammerが厳密な弾性方程式によって円柱の波動伝播の振動数方程式を得た。



C.Chree(1889) が同じ研究を行った。

1880: P.Jaerischが球の振動の一般問題を解析した。その結果はH.Lamb(1889) により独立に得られた。

1880: J.Ewing が振子を応用した近代的地震計による地震観測を行なった。

1881: J.Ewing が地震記録に現われる二種類の波動を縦波と横波と考えた。

1882: H.Hertz が衝撃について最初の包括的な理論を展開した。

1883: B.St.Venantが衝撃に関する初期の研究者の研究をまとめ、はりの横衝撃についての結果を示した。

1883: G.Kirchhoff がスカラー波に遅延ポテンシャルを導入した。

1887: Lord Rayleigh が固体の表面波の伝播を研究し、Rayleigh 波の存在を示した。

1888: Rayleigh とLamb(1889) が厳密な弾性論によって板の振動数方程式を展開した。

1892: C.SonigianaがLamé の解が正しいことを証明した。

1899: C.Knott が平面境界での平面波の反射と透過についての一般式を導いた。

1904: Lamb が層媒体内の地震波伝播についての理論的基礎を築いた。

1908,1912: J.Searsが棒の縦衝撃についての実験的研究を行い、Hertzの理論に従うことを示した。

1911: A.Loveが固体を覆う薄い層内の波動論を展開し、Love 波の存在を示した。

1914: B.Hopkinson が棒の弾性パルスの伝播についての実験を行った。

1921: S.Timoshenkoがせん断変形を考慮したはり理論を展開した。

1924: R.Stoneleyが層境界を伝播するStoneley 波の存在を示した。

1930: L.Donnell が棒の応力波伝播について非線形応力-ひずみ関係の効果を研究した。

1942: von Karman, Taylor(1942), Rakmatulin が1次元有限振幅塑性波理論を展開した。

1943: R.Courant が振動問題に変分法を適用した。

1949: R.Daviesが棒の波動に関する広範な理論的・実験的研究を出版した。

1951: R.Mindlin が板と棒の理論発展の一般的基礎となった板の波動の近似理論を示した。

1955: C.Perkerisが半無限体内のパルスの伝播についてのLamb の問題の解を示した。

1956: M.Turner, R.Clough, H.Martin & L.Toppが有限要素法を工学問題に適用する一般的方法を示した。

1963: R.BanaghとW.Goldsmith が積分方程式法による弾性波問題を計算した。

1966: K.Kapur がはりの振動問題に有限要素法を適用した。

1971: 丹羽義次, 小林昭一らが境界積分方程式法(BIEM, 境界要素法)を一般的な動弾性問題に適用し、工学的な波動問題への応用法を確立した<sup>1-1)</sup>。

上記の偉大な先人の業績を筆者がコメントすることは適当でないが、これらの発展史の

中で、1820年代のNavier, Cauchy, Poissonらのこの分野の巨人たちの業績は、弾性学についての業績でもあり、力学における最も重要な発展の一つであること、また1852年のLaméの解は以後の研究者に線形動弾性境界値問題の解を研究する上での指針を与えたという意味で、共に波動研究史の中でも特に際だっているとされている。

Ewingは東京帝国大学に地震観測所を設け、地震現象の日本における科学的研究の先駆となった。

Rayleigh, Lamb, Loveらの研究は地震学における最大級の業績であろう。

工学的な波動挙動の数値解析によるシミュレーションは、1950年代以後の電子計算機の発展に歩調を合わせて差分法、有限要素法などにより行われてきたが、最近、複雑な境界形状に対する優れた解析法として境界積分方程式法の適用法が確立されたことは、今後の波動シミュレーションに一層有効な武器となろう。

## 1. 2. 2. 動光弾性実験史の概観

ここでは、動光弾性実験法の発展を概観するために、動光弾性実験に関係する歴史上の重要事項を年代順に示す<sup>1-10, 11, 12, 13, 14, 15, 16</sup>。

1816: D. Brewsterが偏光の法則を発見した。

1841: F. Neumann が複屈折と主応力差との関係すなわちBrewsterの法則を導いた。

J. Maxwell も同じ関係を導き(1851)、ゼリーを用いて実験した。

1845: M. Faraday がFaraday効果(磁気旋光効果)を発見した。

1872: E. Muybridge が馬の運動の連続写真撮影を行なった。

1875: J. KerrがKerr効果(電気複屈折効果)を発見した。

1887: E. Machが衝撃波を写真撮影した。

1902: F. PockelおよびL. Filon が光弾性係数と光波長の関係を決定した。

1910: E. Coker がガラスの代わりにセルロイドを用いて組織的に光弾性実験を行った。

1913: A. Mesnagerが図式積分法(主応力線による)を用いた解析法をFilonに指示した。

1923: Filonが図式積分法を発表した。

1925: 荒川郁蔵がベークライトを用いて光弾性縞模様の写真撮影を行なった。

1926: 辻 二郎がフェノライトを用いて静荷重および動荷重に対する写真撮影を行い、写真フリンジ法を確立した。

1929: C. CranzとH. Schardin が電気火花による光シャッターを用いて、光弾性縞模様の高速撮影写真の撮影を行った。

1931: M. Frochtが辻のフリンジ法による実験を追従し欧米各国に紹介した。

1933: 辻と西田正孝が5~8万分の1秒の露出時間で流し写真を撮影した。

1936: G. Oppel が応力凍結法により3次元解析を行った。

- 1941: Frochtがせん断応力差積分法による解析法を適用した。
- 1948: D.Gaborがホログラフィー法を発表した。
- 1952: D.Christieが電気火花と9台一組のカメラのCranz-Schardin型装置を用いて、Perspex板の縁に設置した爆薬の爆発による波動の光弾性縞模様を約10万駒/秒の速度で撮影した。
- 1952: J.KaczerとF.Kroupaが初めてMoire法を用いてひずみ測定を行った。
- 1953: 西田と辻がエポキシ樹脂（アラルダイト）を試験片材料に導入し、3次元実験に成功した。
- 1955: D.ChristieがCranz-Schardin型で自由境界からの反射波に対する動光弾性実験を行った。
- 1956: A.Clark が光弾性材料CR-39の動的性質を調べた。
- 1957: M.Frochtが150 万分の1秒の露出時間で流し写真撮影に成功した。
- 1959: A.DurelliとJ.Dally, W.RileyとDurelli(1961) が板に開けられた円孔周りの円筒波による応力分布を、低弾性係数材料(Hysol 4485) と高速駒撮りカメラであるFastax カメラを用いて約7,500駒/秒で撮影した。
- 1960: 東京大学生産技術研究所, 植村研究室で開発されたMLD-1型超高速カメラ（最高12万駒/秒）が実用化された。
- 1961: 丹羽義次, 小林昭一, 佐藤 誠がMLD-1型カメラを用いて、低弾性エポキシ樹脂のはりを集中衝撃した場合のモノクロの等色線縞模様写真を得た<sup>1-17)</sup>。
- 1962: RileyとDurelliが長方形板の縁に縦集中衝撃を与えた場合について、動光弾性実験とMoire測定を行った。
- 1964: I.DanielとRileyが板の縁に空気の衝撃波を与えて板内に平面波を発生させ、円孔周りの応力分布を高速カメラで撮影した。
- 1966: C.Taylor, C.Bowman, W.North, W.Swinsonが動光弾性実験の光源にレーザーを用いた。
- 1967: DallyとRileyが直方体の光弾性材料内に偏光板を埋め込んで3次元動光弾性実験を行った。
- 1967: 丹羽と佐藤がMLD-1型カメラを用いて、エポキシ樹脂の動的弾性性質を測定した<sup>1-18)</sup>。
- 1968: R.D.Wood がホログラフィー測定により地面の波動伝播を測定した。
- 1969: R.Rowlands, Taylor, DanielがCranz-Schardin型の電気火花の代わりにMultiple-pulse ruby-raserを用いて、透過光および散乱光の動光弾性実験を行った。
- 1970: 佐藤と岩原重之がマイクロフラッシュを光シャッターとする繰り返し入力法を用いて、剛接点の骨組み要素に対する曲げ波伝播の動光弾性実験を行なった<sup>1-19)</sup>。
- 1971: DanielとR.Marino が同時に1.6駒撮影できるCranz-Schardin型の装置で、CR-39と特性抵抗がそのほぼ1/2のDER60/40の2層モデルに対する実験を行

った。

1816年のBrewsterの発見が光弾性研究の発端である。

動光弾性実験に不可欠の運動する物体の連続撮影は、組織的には1872年のMuybridgeが最初とされている。彼は36個のカメラを一線に並べて撮影している。

光弾性実験法の実用化には、光弾性模型材料の開発および解析法の確立などにおいて、Coker, 辻, Frochtらの先駆者の貢献に負うところが極めて大きい。特に、1926年に辻が使用したフェノライトはそれまでのガラスまたはベークライトなどの光弾性材料より格段に優れており、このときから工学への応用が確立されたと考えられている。現在は光弾性材料としてアメリカではCR-39が多用され、わが国ではエポキシ樹脂が用いられることが多い。

Faraday効果およびKerr効果は有力な光シャッターとして動光弾性実験に使用されている。

本格的な動光弾性実験については、1929年のCranzとSchardinが開発した方式がCranz-Schardin Typeと呼ばれ、光源などが改良されてその後よく用いられ、光弾性実験法を波動実験へ応用する上での重要な契機となっている。超高速カメラが開発された現在でもしばしば用いられている。

1964年のDanielらの実験<sup>1-10)</sup>では高速駒撮りカメラが使用されたが、より鮮明な像を得るために閃光時間1 $\mu$ secのマイクロフラッシュを用いた繰り返し入力法が併用されている。

1960年代から継続して行なわれている動光弾性実験の主たる対象は、非均質境界の波動挙動または複雑な境界形状に対する表面波挙動である。しかし、これらの研究のほとんどは境界上に設置された少量の火薬の爆発によって発生する波動を入力としており、点または線波源からの入射波によって生じる円筒波による波動現象である。このような入力法を用いる主な理由は、できるだけ継続時間の短い単純な形のパルスを得て、注目領域の波動現象を短時間で終了させるためであり、この要請は波動に対するあらゆる模型実験の宿命とも言えるであろう。

本研究で行なった第3章で述べる入射パルスとして平面波を用いる実験は、1964年のDanielらの実験で行なわれたが、その後は筆者の知る限り報告されていないようである。しかし、地盤内の波動挙動を地震波などの実際的な状態に対応させて一般的に究明するためには、模型内部から設定した境界へ平面波動を入射させる実験が必要である。

## 第1章 第3節 本研究の目的と内容

### 1. 3. 1. 目的と範囲

本研究は、第1節で述べた重要性を考慮して地盤内の波動挙動を対象にするが、地震工学的に関心のある地表付近の地盤における波動は、基盤と呼ばれる比較的堅固な地盤に地震波が平面波として入射し、その上を覆う表面層と基盤との間で透過、反射、散乱、減衰するモデルによって表現できると考えられている<sup>1-20, 21)</sup>。このとき地震による地盤震動においては、表面波と横波が考慮されるべき重要な成分であるにも関わらず、現段階での波動挙動解析は横波の中のより単純な成分であるSH波が対象にされる場合が多い。本論文の第2章で述べるように、地表面の波動応答に密接に関係する波動には縦波と横波の中のもう一つの成分であるSV波があり、地震工学あるいは耐震設計の面からはこれらの波動がより重要になる場合があると考えられる。また、波動伝播挙動において縦波とSV波には境界における非均質波の振舞いなど理論的にも興味ある現象が多く、本研究でも主としてSV波から発生する波動挙動を対象にして地盤の応答を究明する。

また、本研究は地盤内の波動挙動を実験的に究明する手段として、動光弾性実験を採用し、その有用性と適用範囲を明らかにすることを目的としている。この実験法は1. 2. 2. で示したように、ホログラフィー法またはモアレ法など面測定法という点で似ている他の方法と比較して長い歴史を持ち、特に面測定法であるという点で波動問題に対するこの実験法の適性と優秀さは早くから認められ、先人によって多くの改良と工夫がなされ現在にいたっている。ところが、現在ではたとえば画像処理を伴った数値シミュレーション法にみられるような急速な発展の前では、あまり興味が示されなくなったかの感がある。しかし、数値シミュレーション法が現象を視覚化する方向で多くの研究者の興味を惹くのであれば、動光弾性実験はより直接的な波動現象の視覚化法である。解析条件ならびに理論モデルの選び方に支配される数値シミュレーションの場合と異なり、遂行された実験条件の下では完全に実際の現象そのものを視覚的に平明に示している。事実、本研究の第3章および第4章で示す等色線縞模様写真の一駒の中に含まれる波動挙動に関する情報量は、デジタル量として得られる数値実験の結果と比較して遙かに多い。もちろん数値解析に及ばない幾多の側面も存在するが、実験的事実としての視覚化された波動挙動はそれだけの説得力を持つと考えられる。

本研究で対象にするような平面波の挙動は、理論的には比較的単純であり数値計算によるシミュレーション法によっても部分的には解明されている。しかし、たとえば表面波または非均質波などの実際現象を測定し、理論値と比較検討するには自由境界から内部の一定の領域全体に関する測定値が必要である。このような波動現象を的確に面測定できる数少ない方法の一つが、本研究で用いた動光弾性実験法である。この意味で著者は動光弾性実験法が波動研究における強力な検証法であることを示す考えである。



本研究の目的は上記の観点から、地震波動に対応させ得ることを念頭におき、現実の地表付近の幾何学的な状態に対応した条件をも考慮して、地盤内の波動挙動について

- (1) 模型実験として動光弾性実験を適用すること、
  - (2) 平面波を入射させて得られる波動挙動を検討し、この実験法の適用性を明確にすること、
  - (3) 多層地盤に任意角度でSV波が入射する場合の波動挙動特性を究明すること、
  - (4) 動光弾性実験法の今後の研究課題と方向を明らかにすること
- である。

また、本実験で対象にする波動と応答は以下の範囲で考える。

- ① 模型の注目する領域に入射する波動は平面応力場での平面波であり、しかも主としてSV波である。
- ② 入射平面波は実験条件の制約により一定の形のパルス波である。
- ③ 実験から得られる波動は、厳密には実験材料の性質を反映した非弾性波動であるが、注目する波動応答の本質に影響を与えない限り弾性波動として扱える。

### 1. 3. 2. 内 容

本論文の第2章以下の内容の概要は下記のようなものである。

第2章では、平面弾性波動論の基礎式とP波およびSV波に対する半無限弾性媒体の波動挙動、および一平面境界を挟んで異なる性質の弾性媒体が接続している場合の波動挙動特性を述べた。特に、前者に対してSV波入射による臨界角と表面波の挙動の関係を詳述した。また、平面SV波が任意角度で平行多層弾性地盤の基盤に入射する場合の、地表および地盤内部の振動数応答関数を実地盤例について求め、地盤の応答特性を検討した。

第3章では、光弾性実験の原理と動光弾性実験法について詳述した。ここでは、動光弾性実験法において高速撮影カメラを用いる場合と、光シャッターによる繰り返し入力法を用いる場合とを比較し、それぞれの特徴と適用性を述べた。また、基本となる基準模型に対する動光弾性実験とその等色線縞模様様の波動特性を示した。

第4章では、動光弾性実験に使用した地盤模型の特性を示し、それらに対して得られた等色線縞模様写真から読み取り得る波動伝播挙動を検討した。

第5章では、第4章で用いた模型に対する解析モデルについて、差分法による数値シミュレーションを行い、主として等色線縞模様および粒子速度ベクトルをもとに、動光弾性実験で得られた波動挙動との関係を比較検討した。

第6章では、第4、5章の検討結果をもとに動光弾性実験の適用性について検討した。

表、図、写真は原則として各章の末尾にまとめて挿入するが、文章の一部をなすような表は、文中またはその文のある頁の次に挿入した。

## 第2章 平面波動論

### 第0節 緒 言

無限の広がりを持つ三次元媒体内の波動伝播において、ある瞬間における波動挙動が全く等しい点で構成された面を考えることができ、時間とともに波面 (wavefront) と呼ばれるこの面は伝播する。均質等方弾性媒体内では伝播方向は常にこの波面に垂直である。波面の伝播方向が一方向に限られるとき、波動の伝播方向に垂直な波面内の全ての点は同じ挙動を示し、そのような波動は平面波 (plane wave) と呼ばれる。

一般に、地殻内部で発生した地震波が地表面付近まで到達したとき、震源における波面の形に関わらず平面波として取り扱えることが認められている<sup>2-1)</sup>。平面波を対象にする場合にはたとえば球面波に比較して、伝播距離にともなう幾何学的な減衰がないなど取扱上便利なことが多い。

また、固体内の波動は均質波と非均質波に分類され、弾性波動に限れば前者は実体波と呼ばれ粒子運動の方向と波面の伝播方向の間に一定の関係が保たれる。また、後者は境界波とも呼ばれ粒子運動の方向と波動の伝播方向の間に一定の関係がない。さらに実体波は適当に選んだ座標系に関して、上述の方向間の関係から縦波 (P波)、および横波 (SV波とSH波) に分類される。

弾性平面波としての縦波または横波の一方が自由境界、非均質境界などに入射した場合でも、反射、透過 (屈折)、散乱することによって上記のあらゆる波動が同時に発生することもある。このように、平面実体波が自由境界または非均質層境界など、なんらかの意味で境界をなす部分へ入射するとき複雑な波動挙動を生ずることが、地震波動の特性を形成する大きな要因となっている。

本章の第1, 2節では、半無限弾性媒体内および性質の異なる二つ以上の弾性媒体が接合された場合の波動挙動について、よく知られた関係を整理すると同時に、第3章以下で遭遇する平面SV波が境界へ入射する場合に発生する反射波と表面波の特性、臨界角と表面波の関係および平面波の透過と反射の関係を詳しく述べる。

第3節では、第2節で扱った平面境界を挟む二層問題に対する波動の基礎式をもとに、地震に対する地盤の挙動について最も関心のある平行多層地盤内の波動挙動を、P波、SV波およびSH波が基盤へ任意角度で入射する場合に対して導き、実地盤例に対して振動数応答関数の形で評価する。特に、従来比較的考慮されることの少なかった、平面SV波が基盤へ任意角度で入射する場合を詳しく検討する。

## 第1節 平面波伝播理論<sup>2-2)</sup>

### 2. 1. 1. 無限弾性媒体内の波動

#### 1) 支配方程式

均質等方弾性固体における運動方程式はデカルトテンソル表示<sup>2-3)</sup>を用いると、

$$\sigma_{jk,k} + \rho f_j = \rho \ddot{u}_j \quad (j,k=1\sim 3) \quad \dots\dots\dots (2.1.1)$$

と書ける。

ここに、

$$\sigma_{jk} = \lambda \varepsilon_{hh} \delta_{jk} + 2\mu \varepsilon_{jk}, \quad \dots\dots\dots (2.1.2)$$

$$\varepsilon_{jk} = (u_{j,k} + u_{k,j})/2, \quad \dots\dots\dots (2.1.3a)$$

$$\omega_{jk} = (u_{j,k} - u_{k,j})/2, \quad \dots\dots\dots (2.1.3b)$$

$$u_{j,k} = \partial u_j / \partial x_k, \quad \ddot{u}_j = \partial^2 u_j / \partial t^2$$

である。また、 $\sigma_{jk}$ は任意点の応力テンソル、 $\rho$ は単位体積当りの質量密度、 $f_j$ は単位質量当りの物体力ベクトル、 $u_j$ は物質座標の変位ベクトル、 $\lambda$ と $\mu$ はLaméの定数、 $t$ は時間、 $\delta_{jk}$ はKronecker's delta、 $\varepsilon_{jk}$ と $\omega_{jk}$ はそれぞれひずみテンソルと回転テンソルである。

式(2.1.1)の運動方程式は弾性構成式(2.1.2)と変位とひずみの関係式(2.1.3a)を用いると、変位の項で表されたNavier<sup>2-2)</sup>の式として以下のように書ける。

$$(\lambda + \mu) u_{k,kj} + \mu u_{j,kk} + \rho f_j = \rho \ddot{u}_j \quad \dots\dots\dots (2.1.4a)$$

または

$$(\lambda + 2\mu) \varepsilon_{kk,j} - 2\mu \varepsilon_{jmn} \Omega_{n,m} + \rho f_j = \rho \ddot{u}_j. \quad \dots\dots\dots (2.1.4b)$$

ここに、 $\varepsilon_{jmn}$ は交代テンソル、 $\Omega_n = (1/2) \varepsilon_{nmj} u_{j,m}$ は回転ベクトルである。

式(2.1.4b)は左辺第1項が体積ひずみ、第2項が回転を表す項に分離して表現されているため、物理的解釈が容易である点で便利ながある。

いまLaméのスカラーポテンシャル $\phi$ とベクトルポテンシャル $\phi_j$ を導入すると、変位ベクトルは一般に

$$u_j = \phi_{,j} + \varepsilon_{jmn} \phi_{n,m}, \quad \phi_{m,m} = 0 \quad \dots\dots\dots (2.1.5a)$$

と表せる。

さらに物体力ベクトル $f_j$ もスカラーポテンシャル $b$ とベクトルポテンシャル $B_j$ を導入し、

$$f_j = b_{,j} + \varepsilon_{jmn} B_{n,m}, \quad B_{m,m} = 0 \quad \dots\dots\dots (2.1.5b)$$

と表し、式(2.1.5a,b)を式(2.1.4a)に代入すると、

$$\{(\lambda + 2\mu) \phi_{,kk} + \rho b - \rho \ddot{\phi}\}_{,j} + \varepsilon_{jmn} \{\mu \phi_{n,kk} + \rho B_j - \rho \ddot{\phi}_n\}_{,m} = 0 \quad \dots\dots\dots (2.1.6)$$

となる。

式(2.1.6) は、左辺のそれぞれの項が0 となる時満足されるから、二つの波動方程式

$$(\lambda + 2\mu)\phi_{,kk} + \rho b = \rho \ddot{\phi}, \quad \dots\dots\dots(2.1.7a)$$

$$\mu \phi_{j,kk} + \rho B_j = \rho \dot{\phi}_j \quad \dots\dots\dots(2.1.7b)$$

が得られる。

式(2.1.7) は、スカラーポテンシャル $\phi$ とベクトルポテンシャル $\phi_j$  が独立して運動方程式を満足することを表し、弾性固体内をポテンシャル $\phi$ と $\phi_j$  に対応する非連成の2 種類の波動が伝播し得ることを意味している。

なお、応力成分をポテンシャルで表すと、式(2.1.2) , 式(2.1.3a), 式(2.1.5a)から

$$\sigma_{jk} = \lambda(\phi_{,hh} + \epsilon_{hmn}\phi_{n,mh})\delta_{jk} + \mu(2\phi_{,jk} + \epsilon_{jmn}\phi_{n,mk} + \epsilon_{kmn}\phi_{n,mj}) \quad \dots\dots\dots(2.1.8)$$

である。

## 2) 縦波と横波

1) では弾性固体内を独立な2 種類の波動が伝播することが示されたが、ここではこれらの波動の具体的な性質を検討する。いま物体力が無視できる場合を考えると式(2.1.4a) は

$$(\lambda + \mu)u_{k,kj} + \mu u_{j,kk} = \rho \ddot{u}_j \quad \dots\dots\dots(2.1.9)$$

となる。

ベクトル $\mathbf{v}$ の回転の発散は0 ( $\text{div}(\text{curl } \mathbf{v})=0$ ) であることを考慮して、回転場を含まない場の運動方程式を導くために、式(2.1.9) の両辺に発散のベクトル演算を施すと、

$$(\lambda + 2\mu)(u_{j,j})_{,kk} = \rho (\ddot{u}_{j,j}) \quad \dots\dots\dots(2.1.10)$$

が得られるから、体積ひずみを $\Delta = \epsilon_{kk} = \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33} = u_{k,k}$  とすると、

$$C_L^2 \Delta_{,kk} = \ddot{\Delta} \quad \dots\dots\dots(2.1.11a)$$

となる。ここに、

$$C_L = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho} \quad \dots\dots\dots(2.1.11b)$$

で、体積ひずみの伝播速度すなわち縦波の伝播速度である。

一方、スカラー $\phi$ の勾配の回転が0 ( $\text{curl}(\text{grad } \phi)=0$ ) であることを考慮して、スカラー勾配のない場の運動方程式を導くために、式(2.1.9) の両辺に回転の演算を行うと、

$$\mu(\epsilon_{mnj}u_{j,n})_{,kk} = \rho(\epsilon_{mnj}\ddot{u}_{j,n}) \quad \dots\dots\dots(2.1.12)$$

が得られるから、すでに定義した回転ベクトル $\Omega_n$  を用いると、

$$C_T^2 \Omega_{m,kk} = \ddot{\Omega}_m \quad \dots\dots\dots(2.1.13a)$$

となる。ここに、

$$C_T = \sqrt{\mu/\rho} \quad \dots\dots\dots(2.1.13b)$$

で、回転場の伝播速度すなわち横波の伝播速度である。

式(2.1.11b) と式(2.1.13b) から、縦波と横波の伝播速度の比を $\tau$  とすると、ポアソン比 $\nu$ を導入して

$$\tau^2 = (C_L/C_T)^2 = 2(1-\nu)/(1-2\nu) \quad \dots\dots\dots (2.1.14)$$

のようにポアソン比のみで表せ、 $\sqrt{2} \leq \tau$ である。

## 2. 1. 2. 平面波

### 1) 平面波の変位と応力

ここでは無限弾性体内を伝播する平面波を考える。

いま、図-2.1.1 に示すように波面の単位法線ベクトル  $n_j$  を持ち、速度  $c$  で伝播する平面波を考え、 $s_j = n_j/c$  を遅度ベクトル (slowness vector)<sup>2-3)</sup> とすると、この平面波による粒子変位は

$$u_j = u_j(s_h x_h - t) \quad \dots\dots\dots (2.1.15)$$

と書ける。

式(2.1.15)を式(2.1.9) に代入すると運動方程式は次式となる。

$$\{(\lambda + \mu) s_j s_k + \mu s_h s_h \delta_{jk} - \rho \delta_{jk}\} \ddot{u}_k = 0. \quad \dots\dots\dots (2.1.16)$$

ここに、 $\phi = s_h x_h - t$  として

$$\partial u_j / \partial \phi = u_j' = -\dot{u}_j, \quad \partial^2 u_j / \partial \phi^2 = u_j'' = \ddot{u}_j \quad \dots\dots\dots (2.1.17)$$

の關係を用いた。

式(2.1.16)に遅度ベクトルとのベクトル積およびスカラー積を施すと、それぞれ

$$(\rho c^2 - \mu) \epsilon_{mnj} s_n (\ddot{u}_j) = 0, \quad \dots\dots\dots (2.1.18a)$$

$$\{\rho c^2 - (\lambda + 2\mu)\} s_j (\ddot{u}_j) = 0 \quad \dots\dots\dots (2.1.18b)$$

となる。

式(2.1.18a,b) は

$$\textcircled{1} c = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho} = C_L \text{ かつ } s // u \text{ であるか,} \quad \dots\dots\dots (2.1.19a)$$

$$\textcircled{2} c = \sqrt{\mu/\rho} = C_T \text{ かつ } s \perp u \quad \dots\dots\dots (2.1.19b)$$

のとき満足される。

①の場合は、粒子変位が波面の法線方向に平行で、かつ縦波の伝播速度で伝播する波動であり、以下ではこれをP波とも呼ぶ。また②の場合は、粒子変位が波面の法線方向に垂直で、かつ横波の伝播速度で伝播する波動であり、以下ではこれをS波とも呼ぶ。

式(2.1.11)、式(2.1.13)で導いた縦波、横波は、ここで明らかにされたような波面と粒子運動方向の關係を持ち、このような波動は一般に実体波 (body wave) と呼ばれる。

一方、波面の応力ベクトル  $t_j$  は  $t_j = \sigma_{jk} n_k$  で与えられるから次式で表せる。

$$t_j = \{\lambda u_{h,h} \delta_{jk} + \mu (u_{j,k} + u_{k,j})\} n_k. \quad \dots\dots\dots (2.1.20)$$

式(2.1.15)を代入すると

$$t_j = \{\lambda u_{h,h}' s_h n_j + \mu (u_j' s_k + u_k' s_j) n_k\} \quad \dots\dots\dots (2.1.21)$$

と書けるから、①および②の場合に対してそれぞれ

$$t_j = \rho C_L u_j' = -\rho C_L \dot{u}_j, \quad \dots\dots\dots (2.1.22a)$$



$$t_j = \rho C_T u_j' = -\rho C_T \dot{u}_j \quad \dots\dots\dots(2.1.22b)$$

となる。ここに、

$$s_{kn} = 1/c, \quad s_{hn} = \delta_{jh}/c \quad \dots\dots\dots(2.1.23)$$

の関係を用いており、 $\rho c$ は特性インピーダンス (characteristic impedance, 特性抵抗) または音響インピーダンス (acoustic impedance, 音響抵抗)<sup>2-4)</sup>と呼ばれ、波動伝播に対する材料性質として極めて重要な値である。

式(2.1.22)は粒子変位の方向に対応していることを考慮すると、それぞれP波の応力ベクトルは波面の法線方向に平行であり、S波のそれは波面の法線方向に垂直であることを示している。また両者とも粒子速度の方向と応力ベクトルの方向は逆になる。

## 2) 平面波の支配方程式

平面波動に対して一般性を失うことなく、図-2.1.2 に示すように、この平面波の波面に垂直な単位法線ベクトル $n_j$ が $x, z$ 平面に平行である場合を考えることができる。以下では $x, z$ 平面を鉛直面、 $x, y$ 平面を水平面と呼ぶ。

すでに述べたところにより、縦波の粒子運動は鉛直面に平行な面内にあり、横波の粒子運動は鉛直面または水平面に平行な面内にある。

波動を構成する粒子の変位成分は図-2.1.2 に示すように、波面の法線方向の変位成分を $u_n$ 、これに垂直な変位成分をそれぞれ $u_v, u_y$ とする。またここで考えている平面波に対しては粒子運動は $y$ 軸方向に独立である。したがって物体力が無視できる場合の支配方程式は式(2.1.7) から

$$\nabla_1^2 \phi = (1/C_L^2) \ddot{\phi}, \quad \dots\dots\dots(2.1.24a)$$

$$\nabla_1^2 \phi_j = (1/C_T^2) \ddot{\phi}_j, \quad \dots\dots\dots(2.1.24b)$$

$$\partial \phi_x / \partial x + \partial \phi_z / \partial z = 0 \quad \dots\dots\dots(2.1.24c)$$

と書ける。

ここに、 $\nabla_1^2$ は2次元のラプラスの演算子 $\nabla_1^2 = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial z^2$ である。

変位は式(2.1.5a)により座標成分で表すと

$$u_x = \partial \phi / \partial x - \partial \phi_y / \partial z, \quad \dots\dots\dots(2.1.25a)$$

$$u_y = \partial \phi_x / \partial z - \partial \phi_z / \partial x, \quad \dots\dots\dots(2.1.25b)$$

$$u_z = \partial \phi / \partial z + \partial \phi_y / \partial x, \quad \dots\dots\dots(2.1.25c)$$

と表され、応力と変位の関係は式(2.1.2) と式(2.1.3a)から

$$\sigma_x = (\lambda + 2\mu) (\partial u_x / \partial x + \partial u_z / \partial z) - 2\mu \partial u_z / \partial z, \quad \dots\dots(2.1.26a)$$

$$\sigma_y = \lambda (\partial u_x / \partial x + \partial u_z / \partial z) = \lambda (\sigma_x + \sigma_z) / 2(\lambda + \mu), \quad \dots\dots(2.1.26b)$$

$$\sigma_z = (\lambda + 2\mu) (\partial u_x / \partial x + \partial u_z / \partial z) - 2\mu \partial u_x / \partial x, \quad \dots\dots(2.1.26c)$$

$$\tau_{xy} = \mu \partial u_y / \partial x, \quad \dots\dots\dots(2.1.26d)$$

$$\tau_{yz} = \mu \partial u_y / \partial z, \quad \dots\dots\dots(2.1.26e)$$

$$\tau_{zx} = \mu (\partial u_x / \partial z + \partial u_z / \partial x) \quad \dots\dots\dots(2.1.26f)$$

と書ける。

また、式(2.1.26)に式(2.1.25)の關係を用い、応力成分をポテンシャルで表現すると、

$$\sigma_x = (\lambda + 2\mu)(\partial^2 \phi / \partial x^2 + \partial^2 \phi / \partial z^2) - 2\mu(\partial^2 \phi / \partial z^2 + \partial^2 \phi_y / \partial x \partial z), \quad \dots\dots\dots(2.1.27a)$$

$$\sigma_y = \lambda(\partial^2 \phi / \partial x^2 + \partial^2 \phi / \partial z^2) = \lambda(\sigma_x + \sigma_z) / 2(\lambda + \mu), \quad (2.1.27b)$$

$$\sigma_z = (\lambda + 2\mu)(\partial^2 \phi / \partial x^2 + \partial^2 \phi / \partial z^2) - 2\mu(\partial^2 \phi / \partial x^2 - \partial^2 \phi_y / \partial x \partial z), \quad \dots\dots\dots(2.1.27c)$$

$$\tau_{xy} = \mu(\partial^2 \phi_x / \partial x \partial z - \partial^2 \phi_z / \partial x^2), \quad \dots\dots\dots(2.1.27d)$$

$$\tau_{yz} = \mu(\partial^2 \phi_x / \partial z^2 - \partial^2 \phi_z / \partial x \partial z), \quad \dots\dots\dots(2.1.27e)$$

$$\tau_{xz} = \mu(2\partial^2 \phi / \partial x \partial z + \partial^2 \phi_y / \partial x^2 - \partial^2 \phi_y / \partial z^2) \quad \dots\dots(2.1.27f)$$

とも書ける。

### 3) P波, SV波とSH波

式(2.1.25)と式(2.1.27)から、 $u_x$ ,  $u_z$  および  $\sigma_x$ ,  $\sigma_z$ ,  $\tau_{xz}$  が  $\phi$  と  $\phi_y$  のみの関数である。また、 $u_y$  と  $\tau_{yz}$  が  $\phi_x$  と  $\phi_z$  のみの関数であることと、粒子運動が  $y$  軸に独立であることを考慮すると、図-2.1.2 のように、考えている平面波動を以下の2つの状態に分けることができる。

①  $x$ ,  $z$  平面についての平面ひずみ場を構成する波動： $u_y = \partial / \partial y = 0$ 。

②  $y$  軸に平行な粒子運動のみを構成する波動： $u_x = u_z = \partial / \partial y = 0$ 。

①では1)で述べたP波および、S波の中でも鉛直面内の粒子運動のみを含むことから、SV波と呼ばれる横波が対象になり、それらは、それぞれ図-2.1.2の  $u_n$  および  $u_v$  で示される粒子運動を行う。一方、②ではS波の中でも水平面内の粒子運動のみを含むため、SH波と呼ばれる横波のみが対象になり、図-2.1.2の  $u_y$  で示される粒子運動を行う。

### 4) 平面調和波動

いま平面調和波動が実数の円振動数  $\omega$  を持つ調和項  $\exp(-i\omega t)$ ,  $i = \sqrt{-1}$  で伝播する場合を考える。このとき Lamé のポテンシャルは  $\mathbf{x}$  を位置ベクトルとして

$$\phi(\mathbf{x}, t) = a(\mathbf{x}) \exp(-i\omega t), \quad \dots\dots\dots(2.1.28a)$$

$$\phi_j(\mathbf{x}, t) = b_j(\mathbf{x}) \exp(-i\omega t), \quad \dots\dots\dots(2.1.28b)$$

と表せる。

式(2.1.28)を物体力を無視した場合の式(2.1.7)に代入すると、それぞれ

$$a_{,kk} + k^2 a = 0, \quad \dots\dots\dots(2.1.29a)$$

$$b_{j,kk} + \kappa^2 b_j = 0 \quad \dots\dots\dots(2.1.29b)$$

となる。ここに、

$$k = \omega / C_L, \quad \dots\dots\dots(2.1.29c)$$

$$\kappa = \omega / C_T \quad \dots\dots\dots(2.1.29d)$$

は、それぞれP波およびS波の伝播方向の波数の大きさを、それぞれの波面の単位法線ベクトルを  $n_j$  ,  $m_j$  とすると、波数ベクトルはそれぞれ  $k_j = k n_j$  ,  $\kappa_j = \kappa m_j$  と書ける。式(2.1.29)の解は、一般に

$$a = A \exp(\pm i k_m x_m), \quad k_h k_h = k^2, \quad \dots\dots\dots (2.1.30a)$$

$$b_j = B_j \exp(\pm i \kappa_m x_m), \quad \kappa_h \kappa_h = \kappa^2 \quad \dots\dots\dots (2.1.30b)$$

と表せる。

考えている平面調和波が図-2.1.2 に示した波面をもつとき、 $x$  軸の負方向へ伝播する波面は存在せず、また波数ベクトルの成分  $k_y$  ,  $\kappa_y$  は共に0であるから

$$k_z = \sqrt{(k^2 - k_x^2)}, \quad \dots\dots\dots (2.1.31a)$$

$$\kappa_z = \sqrt{(\kappa^2 - \kappa_x^2)} \quad \dots\dots\dots (2.1.31b)$$

として、式(2.1.28)は式(2.1.30)を用いて

$$\phi = A_1 \exp i(k_x x - k_z z - \omega t) + A_2 \exp i(k_x x + k_z z - \omega t), \quad \dots\dots\dots (2.1.32a)$$

$$\phi_j = B_{j1} \exp i(\kappa_x x - \kappa_z z - \omega t) + B_{j2} \exp i(\kappa_x x + \kappa_z z - \omega t) \quad \dots\dots\dots (2.1.32b)$$

と書ける。

ここに、 $A_1$  ,  $A_2$  ,  $B_{j1}$  ,  $B_{j2}$  は、それぞれの波動に対応するポテンシャルの振幅で一般には複素定数である。また  $A_1$  ,  $B_{j1}$  および  $A_2$  ,  $B_{j2}$  は、波面の単位法線ベクトル  $n_j$  ,  $m_j$  が、それぞれ  $z$  軸の正および負方向の成分を持つ調和波動のポテンシャル振幅である。

変位成分  $u_x$  ,  $u_z$  は式(2.1.25a,c) と式(2.1.32)から以下となる。

$$u_x = i \{ A_1 k_x \exp i(\xi_1) + A_2 k_x \exp i(\xi_2) + B_{y1} \kappa_z \exp i(\zeta_1) - B_{y2} \kappa_z \exp i(\zeta_2) \}, \quad \dots\dots\dots (2.1.33a)$$

$$u_y = i \{ -B_{x1} \kappa_z \exp i(\zeta_1) + B_{x2} \kappa_z \exp i(\zeta_2) - B_{z1} \kappa_x \exp i(\zeta_1) - B_{z2} \kappa_x \exp i(\zeta_2) \}, \quad \dots\dots\dots (2.1.33b)$$

$$u_z = i \{ -A_1 k_z \exp i(\xi_1) + A_2 k_z \exp i(\xi_2) + B_{y1} \kappa_x \exp i(\zeta_1) + B_{y2} \kappa_x \exp i(\zeta_2) \}. \quad \dots\dots\dots (2.1.33c)$$

ここに、

$$\xi_1 = k_x x - k_z z - \omega t, \quad \dots\dots\dots (2.1.34a)$$

$$\xi_2 = k_x x + k_z z - \omega t, \quad \dots\dots\dots (2.1.34b)$$

$$\zeta_1 = \kappa_x x - \kappa_z z - \omega t, \quad \dots\dots\dots (2.1.34a)$$

$$\zeta_2 = \kappa_x x + \kappa_z z - \omega t \quad \dots\dots\dots (2.1.34c)$$

である。

## 2. 1. 3. 半無限弾性体の平面調和波

## 1) 平面調和P波およびSV波

ここでは、耐震工学において特に重要な地表付近の震動挙動を検討する場合に適用できるように、図-2.1.2において、 $x, y$ 平面を自由表面とする $z \geq 0$ の半無限弾性体の平面波動を考える。

まず、2.1.2.3)の①で示したP波およびSV波が存在する場合を考える。このとき式(2.1.32b)の $\phi_j$ は $y$ 方向成分のみであるから、以下では $\phi_y = \phi$ ,  $B_y = B$ と書くと、式(2.1.32)は

$$\phi = A_1 \exp i(\xi_1) + A_2 \exp i(\xi_2), \quad \dots\dots\dots (2.1.35a)$$

$$\psi = B_1 \exp i(\zeta_1) + B_2 \exp i(\zeta_2) \quad \dots\dots\dots (2.1.35b)$$

と書ける。

ここに、 $A_1, A_2$ および $B_1, B_2$ はそれぞれP波およびSV波のポテンシャル振幅であり、 $A_1, B_1$ は入射波、 $A_2, B_2$ は反射波のそれに対応する。

ここで、P波およびSV波の伝播方向と $z$ 軸のなす角度を、それぞれ $\theta$ および $\gamma$ とすると、それぞれの波動の波数ベクトル $k_j, \kappa_j$ の $x, z$ 成分は、

$$k_x = k \sin \theta, \quad k_z = k \cos \theta, \quad \dots\dots\dots (2.1.36a)$$

$$\kappa_x = \kappa \sin \gamma, \quad \kappa_z = \kappa \cos \gamma \quad \dots\dots\dots (2.1.36b)$$

である。

一方、自由境界の条件は $z = 0$ で

$$\sigma_z = \tau_{xz} = 0 \quad \dots\dots\dots (2.1.37)$$

であるから、式(2.1.35)を式(2.1.27c,f)に代入し、式(2.1.36)を用いて整理すると、式(2.1.37)は

$$\begin{aligned} \sigma_z = 0: \quad & k^2 \tau^2 \cos 2\gamma (A_1 + A_2) \exp i(k_x x - \omega t) \\ & - \kappa^2 \sin 2\gamma (B_1 - B_2) \exp i(\kappa_x x - \omega t) = 0, \end{aligned} \quad (2.1.38a)$$

$$\begin{aligned} \tau_{xz} = 0: \quad & k^2 \sin 2\theta (A_1 - A_2) \exp i(k_x x - \omega t) \\ & + \kappa^2 \cos 2\gamma (B_1 + B_2) \exp i(\kappa_x x - \omega t) = 0 \end{aligned} \quad (2.1.38b)$$

となる。ここに、 $\tau = C_L / C_T = \kappa / k$ である。

式(2.1.38)が $x, t$ に無関係に満足されるためには、

$$k_x = \kappa_x \quad \text{または} \quad k \sin \theta = \kappa \sin \gamma, \quad \dots\dots\dots (2.1.39a)$$

すなわち

$$s_{Lx} = s_{Tx} \quad \text{または} \quad \sin \theta / C_L = \sin \gamma / C_T \quad \dots\dots\dots (2.1.39b)$$

でなければならない。

ここに、 $s_L, s_T$ はそれぞれP波およびS波の遅度である。

式(2.1.39)は、入射P波または入射SV波と、これらに対する反射P波および反射SV波の $x$ 軸方向の波数ベクトルの成分、または遅度ベクトルの成分が常に等しいことを要請しており、この場合のSnellの法則<sup>2-5)</sup>である。なお、勿論同種の波動の入射角と反射角は等しい。

図-2.1.3 に、式(2.1.39)で示した Snell の法則から、入射 P 波または S V 波と反射 S V 波または P 波の入・反射角の関係をポアソン比をパラメータとして示す。この図において、 $0 \leq \theta \leq 90^\circ$  の入射 P 波に対して S V 波の反射角は存在するが、 $45^\circ \leq \gamma$  の S V 波の入射角に対して P 波の反射角が存在しない理由は後で述べる。

式(2.1.38)に式(2.1.39)を用いると、半無限弾性体の自由境界に対する平面 P 波または S V 波の入射波と反射波のポテンシャルの振幅比を定める基本的な関係、

$$k^2 \tau^2 \cos 2\gamma (A_1 + A_2) - \kappa^2 \sin 2\gamma (B_1 - B_2) = 0, \quad \dots\dots\dots (2.1.40a)$$

$$k^2 \sin 2\theta (A_1 - A_2) + \kappa^2 \cos 2\gamma (B_1 + B_2) = 0 \quad \dots\dots\dots (2.1.40b)$$

が得られる。

## 2) 平面調和 S H 波

つぎに、2. 1. 2. 3) の②で述べた S H 波が伝播する場合を考える。このとき、そこで述べたようにポテンシャル  $\phi_j$  の成分のうち、 $\phi_x$ 、 $\phi_z$  のみが対象になるから、式(2.1.32b)は以下となる。

$$\phi_x = C_1 \exp i(\xi_1) + C_2 \exp i(\xi_2), \quad \dots\dots\dots (2.1.41a)$$

$$\phi_z = D_1 \exp i(\xi_1) + D_2 \exp i(\xi_2). \quad \dots\dots\dots (2.1.41b)$$

ただし、上2式は独立でなく式(2.1.24c)の条件を満足しなければならない。この条件に対して式(2.1.41)は、共通因子  $\exp i(\kappa_x - \omega t)$  を省いて

$$i\kappa_x \{C_1 \exp(-i\kappa_z z) + C_2 \exp(i\kappa_z z)\} + i\kappa_z \{-D_1 \exp(-i\kappa_z z) + D_2 \exp(i\kappa_z z)\} = 0 \quad \dots\dots (2.1.42a)$$

または

$$(\kappa_x C_1 - \kappa_z D_1) \exp(-i\kappa_z z) + (\kappa_x C_2 + \kappa_z D_2) \exp(i\kappa_z z) = 0 \quad \dots\dots\dots (2.1.42b)$$

となる。

式(2.1.42b)は  $z$  の全ての値に対して成立しなければならないから

$$\kappa_x C_1 = \kappa_z D_1, \quad \kappa_x C_2 = -\kappa_z D_2 \quad \dots\dots\dots (2.1.43)$$

でなければならない。

したがって、式(2.1.41)は以下となる。

$$\phi_x = C_1 \exp i(\xi_1) + C_2 \exp i(\xi_2), \quad \dots\dots\dots (2.1.44a)$$

$$\phi_z = (\kappa_x / \kappa_z) \{C_1 \exp i(\xi_1) - C_2 \exp i(\xi_2)\}. \quad \dots\dots\dots (2.1.44b)$$

一方、自由境界の境界条件は  $z = 0$  で

$$\tau_{yz} = 0 \quad \dots\dots\dots (2.1.45)$$

のみであるから、式(2.1.44)から半無限弾性体の自由境界に対する平面 S H 波の入射、反射波のポテンシャルの振幅比を定める関係

$$(\kappa_z^2 + \kappa_x^2)(C_1 + C_2) = 0, \text{ すなわち } C_1 = -C_2 \quad \dots\dots\dots (2.1.46)$$

が得られる。



## 2. 1. 4. 平面自由境界の波動応答

式(2.1.40)および式(2.1.46)から明らかなように、これらの関係は弾性定数のみに依存し、考えている調和波動の円振動数 $\omega$ に無関係に成立する。したがって、全ての Fourier 成分に対して成立するから任意波形の波動に対しても適用できる。

以下では P 波, S V 波, S H 波などの実体平面波が、自由境界へ任意角度で入射する場合について反射係数と自由境界の挙動を検討する。

### 1) P 波が入射する場合

図-2.1.4 に示すように、平面 P 波が半無限弾性体の自由境界の法線に対して角度 $\theta$ で入射する場合を考える。このとき、表面で反射した波動は再び自由境界へ入射することはないから、式(2.1.40)において自由境界へ向かう入射波のうち、振幅 $A_1$ を持つ入射 P 波のみを考え $B_1=0$ とすれば良い。したがって、式(2.1.40)は $\kappa/k=\tau$ を考慮すると以下となる。

$$\cos 2\gamma (A_1 + A_2) + \sin 2\gamma B_2 = 0, \quad \dots\dots\dots (2.1.47a)$$

$$\sin 2\theta (A_1 - A_2) + \tau^2 \cos 2\gamma B_2 = 0. \quad \dots\dots\dots (2.1.47b)$$

式(2.1.47)のを $A_2$ と $B_2$ を入射 P 波の振幅 $A_1$ に対する比として解くと

$$R_{PP} = A_2/A_1 = (\sin 2\theta \sin 2\gamma - \tau^2 \cos^2 2\gamma) / (\sin 2\theta \sin 2\gamma + \tau^2 \cos^2 2\gamma), \quad \dots\dots\dots (2.1.48a)$$

$$R_{PS} = B_2/A_1 = -2\sin 2\theta \cos 2\gamma / (\sin 2\theta \sin 2\gamma + \tau^2 \cos^2 2\gamma) \quad (2.1.48b)$$

が得られる。

ここに、 $R_{PP}$ ,  $R_{PS}$ はそれぞれ P 波入射に対する反射 P 波と反射 S V 波のポテンシャルの振幅の反射係数である。

式(2.1.48)において、 $\tau$ は式(2.1.14)によりポアソン比 $\nu$ から求められ、反射 S V 波の反射角 $\gamma$ は式(2.1.39)の Snell の法則から求められるから、入射 P 波の任意の入射角 $\theta$ が与えられると各反射波のポテンシャルの反射係数が定まる。

図-2.1.5 (a), (b), (c)に、 $\nu=0.2, 0.3, 0.4$ の場合の $R_{PP}$ および $R_{PS}$ を入射角 $\theta$ に対して示す。これらの図から、ポアソン比が増加するにつれて $R_{PP}$ および $R_{PS}$ の入射角による変化が少なくなることが分かる。

P 波が入射する場合には、 $0 \leq \theta \leq \pi/2$ の範囲の入射角 $\theta$ に対して Snell の法則から

$$\sin \gamma = (C_T/C_L) \sin \theta = \sin \theta / \tau < 1 \quad \text{すなわち} \quad \gamma \leq \theta \quad \dots\dots (2.1.49)$$

が恒等的に成立するから、反射 S V 波の反射角 $\gamma$ は必ず実数として求まる。したがって、 $A_1$ を実数とすると $A_2$ ,  $B_2$ は実数となる。

特別の入射角として、 $\theta=0$ すなわち垂直入射および $\theta=90^\circ$ のとき、式(2.1.48)から

$$R_{PP} = A_2/A_1 = -1, \quad R_{PS} = B_2/A_1 = 0 \quad \dots\dots\dots (2.1.50)$$

である。また、式(2.1.48a)の分子が

$$\sin 2\theta_s \sin 2\gamma - \tau^2 \cos^2 2\gamma = 0 \quad \dots\dots\dots (2.1.51)$$

となる特別な入射角 $\theta_s$ では、図-2.1.5 (a)に示されているように $R_{PP}$ が0となり、反射P波が存在せず、入射P波が反射SV波だけに変換される。

たとえば、ポアソン比が $\nu=1/4$  ( $\tau=\sqrt{3}$ ) のとき $\theta_s=60^\circ$ ,  $77.2^\circ$ である。

ところで実用的な観点からは、ポテンシャルの振幅の反射係数より、たとえば変位振幅の反射係数または自由境界の応答振幅比が与えられることが望ましい。そこで、以下では入射調和P波の変位振幅を基準にし、反射変位波の振幅の反射係数と自由境界の変位成分 $u_x$ ,  $u_z$ の応答振幅を求める。

式(2.1.33)から変位成分はポテンシャルの反射係数を用いて

$$\begin{aligned} u_x &= i \{ A_1 k_x \exp i(\xi_1) + A_2 k_x \exp i(\xi_2) - B_2 \kappa_z \exp i(\zeta_2) \} \\ &= i A_1 k \{ \sin \theta \exp(-i k_z z) + R_{PP} \sin \theta \exp(i k_z z) \\ &\quad - \tau R_{PS} \cos \gamma \exp(i \kappa_z z) \} \exp i(k_x x - \omega t), \quad (2.1.52a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_z &= i \{ -A_1 k_z \exp i(\xi_1) + A_2 k_z \exp i(\xi_2) + B_2 \kappa_x \exp i(\zeta_2) \} \\ &= -i A_1 k \{ \cos \theta \exp(-i k_z z) - R_{PP} \cos \theta \exp(i k_z z) \\ &\quad - \tau R_{PS} \sin \gamma \exp(i \kappa_z z) \} \exp i(k_x x - \omega t) \quad (2.1.52b) \end{aligned}$$

と書ける。

式(2.1.52)の右辺において、 $u_x$ と $u_z$ の入射P波と反射P, SV波に対応する項から、入射P波の振幅を $A_1 k = U_{P0}$ とし、ポテンシャルの反射係数 $R_{PP}$ ,  $R_{PS}$ に対応する変位の反射係数をそれぞれ $r_{PP}$ ,  $r_{PS}$ とすると、両者の関係は

$$r_{PP} = R_{PP}, \quad r_{PS} = \tau R_{PS} \quad \dots\dots\dots (2.1.53)$$

となる。

なお、式(2.1.52)の $\{\}$ 内の各項の符号は、その波動成分が入射波に対して同位相(+)か逆位相(-)かを示す。たとえば、式(2.1.52)から入射P波による原点での変位の $x$ ,  $z$ 方向成分の実部は

$$\text{Re}\{u_x\} = (A_1 k_x + A_2 k_x - B_2 \kappa_z) \sin \omega t, \quad \dots\dots\dots (2.1.54a)$$

$$\text{Re}\{u_z\} = (-A_1 k_z + A_2 k_z + B_2 \kappa_x) \sin \omega t \quad \dots\dots\dots (2.1.54b)$$

となり、 $A_1 > 0$ のとき、考えている入射波の変位は基準時間 $t=0$ から $x$ 軸の正方向、 $z$ 軸の負方向に始動する状態を基準にしていることになる。 $A_2, B_2$ が正の場合の対応する反射波の粒子変位の方向を併せて図-2.1.4に示す。

また、P波入射に対する自由境界の応答変位成分を、 $[u_{xP}]$ ,  $[u_{zP}]$ と書くことにすると、これらは式(2.1.52)において、 $z=0$ として得られ、

$$\begin{aligned} [u_{xP}] &= i A_1 k \{ (1 + R_{PP}) \sin \theta - \tau R_{PS} \cos \gamma \} \exp i(k_x x - \omega t), \\ &\quad \dots\dots\dots (2.1.55a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [u_{zP}] &= i A_1 k \{ (R_{PP} - 1) \cos \theta + \tau R_{PS} \sin \gamma \} \exp i(k_x x - \omega t) \\ &\quad \dots\dots\dots (2.1.55b) \end{aligned}$$

となるから、入射波の変位振幅 $U_{P0}$ に対する自由境界の応答振幅比は、それぞれ

$$\begin{aligned} [u_{xP}]/U_{P0} &= (1 + R_{PP})\sin\theta - \tau R_{PS}\cos\gamma \\ &= 2\tau^2\sin 2\gamma\cos\theta/D, \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (2.1.56a)$$

$$\begin{aligned} [u_{zP}]/U_{P0} &= (R_{PP} - 1)\cos\theta + \tau R_{PS}\sin\gamma \\ &= -2\tau^2\cos 2\gamma\cos\theta/D, \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (2.1.56b)$$

$$D = \sin 2\theta \sin 2\gamma + \tau^2 \cos^2 2\gamma \quad \dots\dots\dots (2.1.56c)$$

である。ここに、 $[ ]$  は自由境界の変位振幅であり、 $D$ は式(2.1.48)の分母である。

図-2.1.5 (d)に、 $\nu = 0.3$  の場合の自由境界の変位の応答振幅比を示す。

応力成分については、入射波の最大せん断応力( $\tau_{MAX}$ )の振幅 $\tau_{P0} = \mu A_1 k^2$ を基準値として、式(2.1.52)と式(2.1.26)から以下のように表せる。

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -\tau_{P0}[(\tau^2 - 2\cos^2\theta)(\exp(-ik_z z) + R_{PP}\exp(ik_z z)) \\ &\quad - R_{PS}\tau^2\sin 2\gamma\exp(ik_z z)]\exp i(k_x x - \omega t), \end{aligned} \quad (2.1.57a)$$

$$\begin{aligned} \sigma_z &= -\tau_{P0}[(\tau^2 - 2\sin^2\theta)(\exp(-ik_z z) + R_{PP}\exp(ik_z z)) \\ &\quad + R_{PS}\tau^2\sin 2\gamma\exp(ik_z z)]\exp i(k_x x - \omega t), \end{aligned} \quad (2.1.57b)$$

$$\begin{aligned} \tau_{xz} &= \tau_{P0}[\sin 2\theta(\exp(-ik_z z) - R_{PP}\exp(ik_z z)) \\ &\quad + R_{PS}\tau^2\cos 2\gamma\exp(ik_z z)]\exp i(k_x x - \omega t). \end{aligned} \quad (2.1.57c)$$

反射P波および反射SV波の最大せん断応力( $\tau_{MAX}$ )の、入射P波のそれに対する反射係数を、それぞれ $\Sigma_{PP}$ 、 $\Sigma_{PS}$ とすると、

$$\Sigma_{PP} = R_{PP}, \quad \Sigma_{PS} = \tau^2 R_{PS} \quad \dots\dots\dots (2.1.57d)$$

となる。

図-2.1.5 (a), (b), (c)に $\Sigma_{PS}$ を併せて示した。 $\Sigma_{PS}$ は式(2.1.57d) から明らかな理由( $\tau^2 \geq 2$ )で、 $R_{PS}$ 、 $r_{PS}$ に比較してかなり大きく、しかもポアソン比の増加と共にその傾向が増加する。

なお、第3章で述べるように、動光弾性実験で得られる等色線縞模様の縞次数は、主応力差または最大せん断応力( $\tau_{MAX}$ )に比例するので、そこでの考察の資料とするために、図-2.1.5 (d)に $[\tau_{MAX}]/\tau_{P0}$ を併せて示した。以下において $\tau_{MAX}$ に関わる諸量を示す理由も同じである。

## 2) SV波が臨界角以下で入射する場合

図-2.1.6 に示すように、平面SV波が自由境界へ入射角 $\gamma$ で入射する場合を考える。このとき1)と同様に式(2.1.40)において入射波の振幅を $B_1$ とし、 $A_1 = 0$ とすれば良い。したがって式(2.1.40)は以下となる。

$$\cos 2\gamma A_2 - \sin 2\gamma (B_1 - B_2) = 0, \quad \dots\dots\dots (2.1.58a)$$

$$\sin 2\theta A_2 - \tau^2 \cos 2\gamma (B_1 + B_2) = 0. \quad \dots\dots\dots (2.1.58b)$$

式(2.1.58)の $A_2$ と $B_2$ を入射SV波の振幅 $B_1$ に対する比として解くと、

$$R_{SS} = B_2/B_1 = (\sin 2\theta \sin 2\gamma - \tau^2 \cos^2 2\gamma) / (\sin 2\theta \sin 2\gamma + \tau^2 \cos^2 2\gamma),$$

$$\dots\dots\dots(2.1.59a)$$

$$R_{SP} = A_2/B_1 = 2\tau^2 \sin 2\gamma \cos 2\gamma / (\sin 2\theta \sin 2\gamma + \tau^2 \cos^2 2\gamma) \\ = \tau^2 \sin 4\gamma / (\sin 2\theta \sin 2\gamma + \tau^2 \cos^2 2\gamma) \quad \dots\dots\dots(2.1.59b)$$

が得られる。

ここに、 $R_{SP}$ 、 $R_{SS}$ はそれぞれS V波入射に対する反射P波、反射S V波のポテンシャルの振幅の反射係数である。

S V波が入射する場合には、入射角 $\gamma$ に対してSnellの法則からP波の反射角 $\theta$ は

$$\sin \theta = (C_L/C_T) \sin \gamma = \tau \sin \gamma \quad \dots\dots\dots(2.1.60)$$

で求められるが、式(2.1.14)から $\tau = C_L/C_T \geq \sqrt{2}$ であり、 $\sin \theta > 1$ となる入射角 $\gamma$ が存在し、実数のP波の反射角が存在しない場合がある。したがって、 $B_1$ が実数であっても $A_2$ 、 $B_2$ は複素数となる場合がある。また、 $\sin \theta = 1$  ( $\theta = 90^\circ$ )となる入射角、すなわち

$$\gamma_c = \sin^{-1} (C_T/C_L) = \sin^{-1} (1/\tau) \\ = \sin^{-1} [\sqrt{\{(1-2\nu)/2(1-\nu)\}}] \quad \dots\dots\dots(2.1.61)$$

を臨界角 (critical angle) <sup>2-3)</sup> と呼ぶ。

図-2.1.3 で示した $\theta = 90^\circ$ のときの $\gamma$ の値が $\gamma_c$ であり、 $\nu = 0$ に対して $\gamma_c = 45^\circ$ となる。なお、 $\gamma \geq \gamma_c$ の場合については次項3)で述べる。

図-2.1.7 に、ポアソン比と臨界角の関係を示す。

式(2.1.59)から

$\gamma = 0$ のとき

$$R_{SS} = B_2/B_1 = -1, \quad R_{SP} = A_2/B_1 = 0, \quad \dots\dots\dots(2.1.62a)$$

$\gamma = \gamma_c$ のとき

$$R_{SS} = -1, \quad R_{SP} = 4\{\sqrt{(\tau^2 - 1)}\}/(\tau^2 - 2) = 2\{\sqrt{(1 - 2\nu)}\}/\nu, \quad (2.1.62b)$$

$\gamma = 45^\circ$ のとき、 $\gamma_c$ に無関係に

$$R_{SS} = 1, \quad R_{SP} = 0 \quad \dots\dots\dots(2.1.62c)$$

である。

図-2.1.8 に、 $\gamma = \gamma_c$ のときの $R_{SP}$ をポアソン比に対して示す。後で示す図-2.1.10, 11, 12の所で述べるように、 $R_{SP}$ は臨界角付近で極大値をとる。

また、式(2.1.59a)の分子が

$$\sin 2\theta \sin 2\gamma_s - \tau^2 \cos^2 2\gamma_s = 0 \quad \dots\dots\dots(2.1.63)$$

となる特別の入射角 $\gamma_s$ のとき、 $R_{SS} = 0$ となるから反射S V波が存在せず入射S V波が反射P波だけに変換される。たとえば、ポアソン比が $\nu = 1/4$ のとき $\gamma_s = 30^\circ$ 、 $34.26^\circ$ である。ただし、 $\nu \geq 0.263$ のとき式(2.1.63)の左辺は恒等的に正となる。

次に、P波入射の場合と同様に変位波の反射係数などを考える。

式(2.1.33)から、変位成分はポテンシャルの反射係数を用いて

$$u_x = i \{A_2 k_x \exp i(\xi_2) + B_1 \kappa_z \exp i(\zeta_1) - B_2 \kappa_z \exp i(\zeta_2)\}$$

$$= i B_1 \kappa (\cos \gamma \exp(-i \kappa_z z) - R_{ss} \cos \gamma \exp(i \kappa_z z) + (R_{sp}/\tau) \sin \theta \exp(i \kappa_z z)) \exp i (\kappa_x x - \omega t),$$

..... (2.1.64a)

$$u_z = i \{ A_2 k_z \exp i (\xi_2) + B_1 \kappa_x \exp i (\xi_1) + B_2 \kappa_x \exp i (\xi_2) \}$$

$$= i B_1 \kappa (\sin \gamma \exp(-i \kappa_z z) + R_{ss} \sin \gamma \exp(i \kappa_z z) + (R_{sp}/\tau) \cos \theta \exp(i \kappa_z z)) \exp i (\kappa_x x - \omega t)$$

..... (2.1.64b)

と書ける。

式(2.1.64)の右辺において、 $u_x$  と  $u_z$  の入射SV波とそれぞれの反射P, SV波に対応する項から、入射SV波の振幅を  $B_1 \kappa = U_{s0}$  とし、ポテンシャル振幅の反射係数  $R_{ss}$ ,  $R_{sp}$  に対応する変位の反射係数をそれぞれ  $r_{ss}$ ,  $r_{sp}$  とすると、両者の関係は

$$r_{ss} = R_{ss}, \quad r_{sp} = R_{sp}/\tau \quad \text{..... (2.1.65)}$$

となる。なお、式(2.1.64)の  $\{ \}$  内の各項の符号の意味はP波入射の場合と同じである。たとえば、式(2.1.64)から入射SV波による原点での変位の  $x$ ,  $z$  方向成分の実部は

$$\text{Re}\{u_x\} = (B_1 \kappa_z - B_2 \kappa_z + A_2 k_x) \sin \omega t, \quad \text{..... (2.1.66a)}$$

$$\text{Re}\{u_z\} = (B_1 \kappa_x + B_2 \kappa_x + A_2 k_z) \sin \omega t \quad \text{..... (2.1.66b)}$$

となり、 $B_1 > 0$  のとき考えている入射波の変位は、基準時間  $t = 0$  から  $x$  軸と  $z$  軸の正方向に始動する状態を基準にしていることになる。 $A_2$ ,  $B_2$  が正の実数の場合の対応する反射波の変位方向を併せて図-2.1.6 に示す。

また、自由境界の変位成分  $u_x$ ,  $u_z$  の応答変位を、 $[u_{xs}]$ ,  $[u_{zs}]$  と書くことにすると、これらは式(2.1.64)において  $z = 0$  として得られ、

$$[u_{xs}] = i B_1 \kappa \{ (1 - R_{ss}) \cos \gamma + (R_{sp}/\tau) \sin \theta \} \exp i (\kappa_x x - \omega t),$$

..... (2.1.67a)

$$[u_{zs}] = i B_1 \kappa \{ (1 + R_{ss}) \sin \gamma + (R_{sp}/\tau) \cos \theta \} \exp i (\kappa_x x - \omega t)$$

..... (2.1.67b)

となるから、入射波の変位振幅  $U_{s0}$  に対する自由境界の応答変位振幅比は、それぞれ

$$[u_{xs}]/U_{s0} = (1 - R_{ss}) \cos \gamma + (R_{sp}/\tau) \sin \theta$$

$$= 2\tau^2 \cos 2\gamma \cos \gamma / D, \quad \text{..... (2.1.68a)}$$

$$[u_{zs}]/U_{s0} = (1 + R_{ss}) \sin \gamma + (R_{sp}/\tau) \cos \theta$$

$$= 2\tau \sin 2\gamma \cos \theta / D, \quad \text{..... (2.1.68b)}$$

$$D = \sin 2\theta \sin 2\gamma + \tau^2 \cos^2 2\gamma \quad \text{..... (2.1.68c)}$$

である。

したがって、 $\gamma = 45^\circ$  のとき

$$[u_{xs}]/U_{s0} = 0, \quad \text{..... (2.1.69a)}$$

$$[u_{zs}]/U_{s0} = \sqrt{2} \quad \text{..... (2.1.69b)}$$

であり、また  $\gamma = \gamma_c$  すなわち  $\sin \theta = 1$  のとき

$$[u_{xs}]_c/U_{s0} = 2\tau \{\sqrt{(\tau^2 - 1)}\}/(\tau^2 - 2) = \{\sqrt{2(1 - \nu)}\}/\nu, \quad \dots (2.1.69c)$$

$$[u_{zs}]_c/U_{s0} = 0 \quad \dots (2.1.69d)$$

となる。

図-2.1.9 に、 $\gamma = \gamma_c$  の場合の  $[u_{xs}]_c/U_{s0}$  をポアソン比に対して示す。

応力成分は、入射波の最大せん断応力 ( $\tau_{\max}$ ) の振幅  $\tau_{s0} = \mu B_1 \kappa^2$  を基準値として、式 (2.1.64) から以下のように表される。

$$\begin{aligned} \sigma_x = & -\tau_{s0} [(\tau^2 - 2\cos^2 \theta)(R_{sp}/\tau^2) \exp(i k_z z) \\ & + \sin 2\gamma \{\exp(-i \kappa_z z) - R_{ss} \exp(i \kappa_z z)\}] \exp i(\kappa_x x - \omega t), \end{aligned} \quad \dots (2.1.70a)$$

$$\begin{aligned} \sigma_z = & -\tau_{s0} [(\tau^2 - 2\sin^2 \theta)(R_{sp}/\tau^2) \exp(i k_z z) \\ & - \sin 2\gamma \{\exp(-i \kappa_z z) - R_{ss} \exp(i \kappa_z z)\}] \exp i(\kappa_x x - \omega t), \end{aligned} \quad \dots (2.1.70b)$$

$$\begin{aligned} \tau_{xz} = & -\tau_{s0} [(R_{sp}/\tau^2) \sin 2\theta \exp(i k_z z) \\ & - \cos 2\gamma \{\exp(-i \kappa_z z) + R_{ss} \exp(i \kappa_z z)\}] \exp i(\kappa_x x - \omega t). \end{aligned} \quad \dots (2.1.70c)$$

図-2.1.9 に、 $\gamma = \gamma_c$  の場合の  $[\tau_{\max}]_c/\tau_{s0}$  も併せて示した。図-2.1.8 について述べたように  $\gamma = \gamma_c$  のとき、自由境界の応答が  $R_{sp}$  に強く影響されることが分かる。

また、反射 P 波および反射 SV 波の最大せん断応力 ( $\tau_{\max}$ ) の、入射 SV 波のそれに対する反射係数を、それぞれ  $\Sigma_{ss}$ 、 $\Sigma_{sp}$  とすると

$$\Sigma_{ss} = R_{ss}, \quad \Sigma_{sp} = R_{sp}/\tau^2 \quad \dots (2.1.70d)$$

となる。

式 (2.1.70d) から直ちに分かるように、P 波が入射するときと比較すると、反射 P 波による  $\tau_{\max}$  の反射係数は  $R_{sp}$  よりかなり小さい。

### 3) SV 波が臨界角を越えて入射する場合

2) で述べたように、SV 波が自由境界へ入射するとき、入射角によつては反射 P 波の反射角が実数の範囲では得られない場合がある。式 (2.1.60) に示したように、P 波の反射角が  $\theta = \pi/2$ 、すなわち反射 P 波が境界に沿う方向に伝播する場合の入射角  $\gamma_c$  を臨界角と呼ぶ。

以下では SV 波の入射角が臨界角を越えた場合を考える。

式 (2.1.60) から  $\gamma \geq \gamma_c$ 。すなわち  $\sin \theta = \tau \sin \gamma \geq 1$  のとき

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \pm \sqrt{1 - \sin^2 \theta} \\ &= i \sqrt{(\tau^2 \sin^2 \gamma - 1)} = k_z/k \end{aligned} \quad \dots (2.1.71a)$$

と置けるから、式 (2.1.59) の分母および式 (2.1.68) の D における  $\sin 2\theta$  は

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta = 2 i \tau \sin \gamma \sqrt{(\tau^2 \sin^2 \gamma - 1)} \quad \dots (2.1.71b)$$

となる。

なお、式(2.1.71a)の第一式の複号のうち正号のみを採用する理由は、式(2.1.64)において、 $\exp(i k_z z) = \exp(i k \cos \theta z)$ の項が、 $\cos \theta = +i \sqrt{(\tau^2 \sin^2 \gamma - 1)}$ のときのみ、 $z$ の増加とともに増加しないという制約を満足するからである。

したがって、式(2.1.59)と式(2.1.71b)から $R_{ss}$ の分母と分子が互いに共役複素数になることを考慮すると、

$$R_{ss} = -\exp(-2i\varphi), \quad \dots\dots\dots(2.1.72a)$$

$$\begin{aligned} R_{sp} &= (\tau^2 \sin 4\gamma / r) \exp(-i\varphi) \\ &= R_{sp}' \exp(-i\varphi) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(2.1.72b)$$

と書ける。

ここに、

$$R_{sp}' = (\tau^2 \sin 4\gamma / r) \quad \dots\dots\dots(2.1.72c)$$

$$\begin{aligned} r &= |D| \\ &= \sqrt{[2\tau \sin 2\gamma \sin \gamma \sqrt{(\tau^2 \sin^2 \gamma - 1)}]^2 + (\tau^2 \cos^2 2\gamma)^2}, \end{aligned} \quad (2.1.72d)$$

$$\begin{aligned} \varphi &= \arg(D) \\ &= \tan^{-1} [2\sin \gamma \sin 2\gamma \{\sqrt{(\tau^2 \sin^2 \gamma - 1)}\} / \tau \cos^2 2\gamma] \quad \dots\dots\dots(2.1.72d) \end{aligned}$$

である。ただし、 $\arg(D)$ は複素数 $D$ の偏角を意味する。

式(2.1.72)から、 $\gamma_c \leq \gamma \leq 90^\circ$ において $R_{ss}$ の符号は不変であるが、 $R_{sp}$ の符号は $\gamma = 45^\circ$ を境に逆転することが分かる。

図-2.1.10, 2.1.11, 2.1.12の(a)に、それぞれ、 $\nu = 0.2, 0.3, 0.4$ の場合の $R_{sp}$ ,  $R_{ss}$ および $\varphi$ を入射角 $\gamma$ に対して示す。臨界角 $\gamma_c$ はポアソン比の順に、それぞれ $37.76^\circ$ ,  $32.31^\circ$ ,  $24.09^\circ$ である。

これらの図より、 $R_{sp}$ は臨界角付近で鋭く変化し最大値となるが、ポアソン比が増加すると臨界角を越えても滑らかに増加し、臨界角より大きい角度で最大値に達し、 $R_{sp}$ の正の極値はポアソン比が増加するとき急速に減少するが負の極値はそれほど減少しないこと、また $R_{ss}$ の絶対値は臨界角までは滑らかに減少することが分かる。一方、反射波の位相 $\varphi$ は $\gamma = 45^\circ$ で最大値 $\pi/2$ をとり、入射角の増加と共に滑らかに減少する。

変位成分と応力成分は式(2.1.71)と式(2.1.72)を考慮し、また

$$k_z = k \cos \theta = i k \sqrt{(\tau^2 \sin^2 \gamma - 1)} = i k_z' \quad \dots\dots\dots(2.1.73)$$

とすると、 $\gamma \geq \gamma_c$ のとき

$$\begin{aligned} u_x &= i B_1 [R_{sp}' k_x \exp(-k_z' z) \exp i(k_x x - \omega t - \varphi) \\ &\quad + \kappa_z \exp i(\zeta_1) + \kappa_z \exp i(\zeta_2 - 2\varphi)] \\ &= i B_1 \kappa [R_{sp}' \sin \gamma \exp(-k_z' z) \\ &\quad + 2\cos \gamma \cos(\kappa_z z - \varphi)] \exp i(\kappa_x x - \omega t - \varphi), \quad (2.1.74a) \\ u_z &= i B_1 [R_{sp}' k_z \exp(-k_z' z) \exp i(k_x x - \omega t - \varphi) \\ &\quad + \kappa_x \exp i(\zeta_1) - \kappa_x \exp i(\zeta_2 - 2\varphi)] \\ &= -B_1 \kappa [(R_{sp}' / \tau) \{\sqrt{(\tau^2 \sin^2 \gamma - 1)}\} \exp(-k_z' z) \end{aligned}$$

$$-2\sin\gamma\sin(\kappa_z z - \varphi)]\exp i(\kappa_x x - \omega t - \varphi), \quad (2.1.74b)$$

$$\begin{aligned} \sigma_x = & -\tau_0 \{ [1 - (2/\tau^2)\cos^2\theta] R_{SP}' \exp i(k_z z - \varphi) \\ & + \sin 2\gamma \{ \exp(-i\kappa_z z) + \exp i(\kappa_z z - 2\varphi) \} \} \exp i(\kappa_x x - \omega t), \\ = & -\tau_0 [R_{SP}' \{ 1 - (2/\tau^2) + 2\sin^2\gamma \} \exp(-k_z' z) \\ & + 2\sin 2\gamma \cos(\kappa_z z - \varphi)] \exp i(\kappa_x x - \omega t - \varphi), \end{aligned} \quad (2.1.74c)$$

$$\begin{aligned} \sigma_z = & -\tau_0 \{ [1 - (2/\tau^2)\sin^2\theta] R_{SP}' \exp i(k_z z - \varphi) \\ & - \sin 2\gamma \{ \exp(-i\kappa_z z) + \exp i(\kappa_z z - 2\varphi) \} \} \exp i(\kappa_x x - \omega t), \\ = & -\tau_0 [R_{SP}' \cos 2\gamma \exp(-k_z' z) \\ & - 2\sin 2\gamma \cos(\kappa_z z - \varphi)] \exp i(\kappa_x x - \omega t - \varphi), \end{aligned} \quad (2.1.74d)$$

$$\begin{aligned} \tau_{xz} = & -\tau_0 [(R_{SP}'/\tau^2)\sin 2\theta \exp i(k_z z - \varphi) \\ & - \cos 2\gamma \{ \exp(-i\kappa_z z) - \exp i(\kappa_z z - 2\varphi) \}] \exp i(\kappa_x x - \omega t). \\ = & -2i\tau_0 [(R_{SP}'/\tau)\sin\gamma \{ \sqrt{(\tau^2\sin^2\gamma - 1)} \} \exp(-k_z' z) \\ & + \cos 2\gamma \sin(\kappa_z z - \varphi)] \exp i(\kappa_x x - \omega t - \varphi) \end{aligned} \quad (2.1.74e)$$

と書ける。

したがって、変位成分と応力成分の実部は

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\{u_x\} = & -U_{S0} [R_{SP}' \sin\gamma \exp(-k_z' z) \\ & + 2\cos\gamma \cos(\kappa_z z - \varphi)] \sin(\kappa_x x - \omega t - \varphi), \end{aligned} \quad (2.1.75a)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\{u_z\} = & -U_{S0} [(R_{SP}'/\tau) \{ \sqrt{(\tau^2\sin^2\gamma - 1)} \} \exp(-k_z' z) \\ & - 2\sin\gamma \sin(\kappa_z z - \varphi)] \cos(\kappa_x x - \omega t - \varphi), \end{aligned} \quad (2.1.75b)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\{\sigma_x\} = & -\tau_0 [R_{SP}' \{ 1 - (2/\tau^2) + 2\sin^2\gamma \} \exp(-k_z' z) \\ & + 2\sin 2\gamma \cos(\kappa_z z - \varphi)] \cos(\kappa_x x - \omega t - \varphi), \end{aligned} \quad (2.1.75c)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\{\sigma_z\} = & -\tau_0 [R_{SP}' \cos 2\gamma \exp(-k_z' z) \\ & - 2\sin 2\gamma \cos(\kappa_z z - \varphi)] \cos(\kappa_x x - \omega t - \varphi), \end{aligned} \quad (2.1.75d)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\{\tau_{xz}\} = & 2\tau_0 [(R_{SP}'/\tau)\sin\gamma \{ \sqrt{(\tau^2\sin^2\gamma - 1)} \} \exp(-k_z' z) \\ & + \cos 2\gamma \sin(\kappa_z z - \varphi)] \sin(\kappa_x x - \omega t - \varphi) \end{aligned} \quad (2.1.75e)$$

となる。

式(2.1.74)から入射角が臨界角のとき、自由境界の $\sigma_x$ の応答振幅比は

$$[\sigma_{xs}]_c / \tau_{S0} = 2[\tau_{\max}]_c / \tau_{S0} = 2\{\sqrt{(1-\nu)}\} / \nu(1-\nu) \quad \dots\dots\dots (2.1.75f)$$

と表わされ、式(2.1.69)の変位成分に関する関係もそのまま満足されていることが分かる。

また、式(2.1.74)から、臨界角を越える入射角においては、それぞれの変位成分に対する反射P波の寄与は $z=0$ で最大で、 $z$ 軸の正方向に向かって指数関数的に減少し、 $z$ に無関係に入射波の位相より $\varphi$ 遅れること、反射SV波の寄与は入射SV波と同振幅で位相が $z$ に無関係に $2\varphi$ 遅れることが分かる。この場合の反射P波のような性質を持つ波動は表面波と呼ばれ、SV波は入射波と反射波が同振幅であることからこの様な場合を全反射(total reflection)<sup>2-6)</sup>と呼ぶ。

式(2.1.75a, b)から調和振動の項を消去すると、粒子が楕円運動することが容易に分かる



が、このことについては次項4)で検討する。

図-2.1.10, 2.1.11, 2.1.12の(b)に、それぞれ、 $\nu=0.2, 0.3, 0.4$  の場合の自由境界の応答比 $[u_{xs}]/U_{s0}$  と $[u_{zs}]/U_{s0}$  および $[\tau_{\max}]/\tau_{s0}$  を、入射角 $\gamma$ に対して示す。

これらをそれぞれの図の(a)と比較すると、

①  $u_x$  は臨界角までは入射SV波の寄与を、臨界角近傍以後は $R_{sp}$ の寄与を受けること、

②  $\tau_{\max}$ は全ての入射角について $R_{sp}$ の寄与を直接受けること、

が明かである。また、 $u_z$  に関しては、これらの図だけからではポテンシャルの反射係数との関係が明らかでない。

#### 4) SV波入射による自由境界付近の応答

以下では、入射SV波の入射角 $\gamma$ と自由境界付近の応答との関係を、特に臨界角を越えた場合について詳細に検討するために、 $\nu=0.3$  ( $\gamma_c=32.3^\circ$ ) の場合を例として取り上げる。

図-2.1.13に、 $\nu=0.3$  の場合の $k_z/k$ ,  $k_z'/k$ ,  $\kappa_z/\kappa$  と入射角の関係を示す。

$k_z'/k$  は式(2.1.73)に示したように、臨界角を越えて虚数になった $\cos\theta$  を意味する。式(2.1.70)、式(2.1.72c) および式(2.1.74)から、この値が応答の位相および自由境界からの距離による減衰に深く関わる事が分かる。

図-2.1.14(a), (b)に、図-2.1.11(b)に示した $\nu=0.3$  の場合の自由境界の応答、 $[u_{xs}]/U_{s0}$ ,  $[u_{zs}]/U_{s0}$  および $[\tau_{\max}]/\tau_{s0}$  の、入射波と反射波による寄与を分けて示す。すなわち、(a)は反射P波による寄与を、(b)は入射および反射SV波による寄与を示す。

図-2.1.14を図-2.1.11(b)と比較すると、実体波である臨界角までは全応答に対する両寄与分が自然な形であるが、粒子が楕円運動をする臨界角を越えた入射角で、 $\gamma=45^\circ$  以下と以上では寄与のあり方が著しく異なる事が分かる。すなわち、 $\gamma \geq 45^\circ$  のとき反射P波と入・反射SV波の寄与の符号が逆であり、全体としては、 $u_x$  は反射P波の寄与の、 $u_z$  は入・反射SV波の寄与の符号を持つ。

この様にして構成された図-2.1.11(b)の変位応答について、 $z$  の小さい範囲では

①  $\gamma_c \leq \gamma \leq 45^\circ$  のとき、 $[u_x][u_z] \leq 0$  となり、 $y$  軸からみて時計回り方向の楕円粒子運動、すなわち波動の進行方向に対して順回転(prograde)を行い、

②  $\gamma \geq 45^\circ$  のとき、 $[u_x][u_z] \geq 0$  となり、 $y$  軸からみて反時計回り方向の楕円粒子運動、すなわち、波動の進行方向に対して逆回転(retrograde)することが分かる。

この様に、波面と粒子運動の関係が、2. 1. 2. 1) で述べた実体波としての関係と異なることが、入射角が臨界角を越えた場合の波動挙動の物理的意味でもある。

次に、式(2.1.71a) で考えたように、SV波の入射角が臨界角を越えて、 $\gamma \geq \gamma_c$ 。すなわち  $\sin\theta \geq 1$  または  $\tau \sin\gamma \geq 1$  となるときの、自由境界近傍の幾何学的な波面の状態を考える。

図-2.1.6 から判断できるように (図-4.2.4 参照), 自由境界と入射SV波面の交点がx軸に沿って移動する速度を $C_{TA}$ とすると,  $C_{TA} = C_T / \sin \gamma$  である.  $C_{TA}$ は見かけの伝播速度と呼ばれることがある<sup>2-2)</sup>.

(1)  $C_{TA} \geq C_L$  または  $\tau \sin \gamma \leq 1$  : SV波の入射角 $\gamma$ が小さく,  $C_{TA}$ がP波の伝播速度より十分大きいとき, これをあたかも自由境界を移動する走行荷重のように考えると, head wave<sup>2-7)</sup> の原理により, P波とSV波が平面波となって内部に伝播する. これらの平面波が, それぞれSnellの法則を満足する反射角を持つことは容易に確かめられる.

(2)  $C_{TA} \leq C_L$  または  $\tau \sin \gamma \geq 1$  : SV波の入射角が増加して,  $C_{TA}$ がP波の伝播速度以下になると, head wave としてのSV波は依然平面波を形成するが, P波はもはや, head wave としての平面波を形成できない.

上記二種類の波面の幾何学的状態が, 表面波が発生するかどうかを区別すると考えることもできる.

$\gamma \geq \gamma_c$  のとき, 表面波を構成する反射P波の伝播方向はx軸の正方向を向き, 一方振幅の等しい波面はz軸の正方向を向いているから, 両者の方向は互いに垂直である. また,  $\gamma < \gamma_c$  のときには両者が平行である. 両者が平行な波動は均質波 (Homogeneous Wave), 平行でない波動は非均質波 (Inhomogeneous Wave) と呼ばれ<sup>2-8)</sup>, 上記の表面波は両者の間の角度が直角になる特別な場合の非均質波である.

## 5) SH波が入射する場合

2. 1. 3. 2) でSH波が入射する場合を考察したが, 式(2.1.43c) に示されているように, 式(2.1.24c) を満足しなければならないため, 二つのポテンシャル $\phi_x, \phi_z$ を用いているにもかかわらず, 結局振幅 $C_1, C_2$ のみが未知量となる. したがって, SH波を対象にする場合にはP波, SV波で行ったように, ポテンシャルを導入して式(2.1.7) または式(2.1.25)のように,  $\phi$ と $\psi$ に関する独立な二つの波動方程式に分離できることの利点がなく, 直接変位を導入する方が便利である.

SH波に対しては, 2. 1. 2. 3) で示したように, 変位成分として $u_y$ のみを対象にすればよいから, 式(2.1.41)に対応させて, 波動方程式

$$C_T^2 \nabla^2 u_y = \ddot{u}_y \quad \dots\dots\dots (2.1.76)$$

を満足する解として

$$\begin{aligned} u_y &= C'' \exp i(\zeta_1) + C' \exp i(\zeta_2) \\ &= \{C'' \exp i(-\kappa_z z) + C' \exp i(\kappa_z z)\} \exp i(\kappa_x x - \omega t) \end{aligned} \quad (2.1.77)$$

と書ける.

自由境界の条件は,  $z = 0$  で  $\tau_{yz} = 0$  であるから, 式(2.1.26e) を用いると

$$(C'' - C') \kappa_z = 0 \quad \text{すなわち} \quad C'' = C' \quad \dots\dots\dots (2.1.78)$$

が得られる.

したがって

$$u_y = 2C'' \cos(\kappa_z z) \exp i(\kappa_x x - \omega t) \quad \dots\dots\dots (2.1.79a)$$

と表されるから、 $z$  方向には定常分布をし、またたとえば自由境界においては

$$u_y = 2C'' \exp i(\kappa_x x - \omega t) \quad \dots\dots\dots (2.1.79b)$$

となり、入射波の振幅の2倍の振幅となることが分かる。

応力成分は  $\tau_{yz}$  のみで

$$\tau_{yz} = -2\mu \kappa C'' \cos \gamma \sin(\kappa_z z) \exp i(\kappa_x x - \omega t) \quad \dots\dots\dots (2.1.80)$$

と書ける。

## 2. 1. 5. 表面波(Rayleigh Wave)

### 1) Rayleigh 表面波の伝播速度

ここまでは、主として均質波である実体波の挙動について述べ、入射角および入射波の種類などの入射波の条件、および境界条件によっては非均質波としての表面波が存在することを示した。以下では実体波の入射とは無関係に存在し得る表面波について述べる。

2. 1. 4. 3) で述べたように、SV波が臨界角を越えた角度で自由境界に入射したとき、反射P波が表面波となる理由は反射角が複素数となり、したがって  $z$  方向の波数成分  $k_z$  が純虚数になるためであった。そこで図-2.1.15に示す半無限弾性体において入射波の存在とは無関係に、 $x$  軸の正方向へ未知の伝播速度 ( $C_R$ ) の伝播因子を持つポテンシャルを考え、境界条件を満足するような波動挙動を検討する。

いま、対象とする波動がたとえば反射波の項を用いて表されるとき、式(2.1.35)のそれぞれのポテンシャルの反射波の項(右辺第2項)のみを考えると、

$$\phi = A_2 \exp i(k_x x + k_z z - \omega t), \quad \dots\dots\dots (2.1.81a)$$

$$\phi = B_2 \exp i(\kappa_x x + \kappa_z z - \omega t) \quad \dots\dots\dots (2.1.81b)$$

である。

この波動が自由境界の条件、式(2.2.37)およびSnellの法則、式(2.1.39a)を満足するとき、式(2.1.40)から

$$A_2 \kappa^2 \cos 2\gamma + B_2 \kappa^2 \sin 2\gamma = 0, \quad \dots\dots\dots (2.1.82a)$$

$$-A_2 k^2 \sin 2\theta + B_2 \kappa^2 \cos 2\gamma = 0 \quad \dots\dots\dots (2.1.82b)$$

と書ける。

いま関心があるのは表面波の性質を持つ波動で、入・反射角より  $x$  方向の波数が重要であるから、式(2.1.82)を式(2.1.36)と式(2.1.31)の関係を用いて書き直すと、以下のように表せる。

$$A_2 (\kappa^2 - 2\kappa_x^2) + 2B_2 \kappa_x \sqrt{(\kappa^2 - \kappa_x^2)} = 0, \quad \dots\dots\dots (2.1.83a)$$

$$-2A_2 \kappa_x \sqrt{(k^2 - \kappa_x^2)} + B_2 (\kappa^2 - 2\kappa_x^2) = 0. \quad \dots\dots\dots (2.1.83b)$$

式(2.1.83)が意味のある解を持つためには、左辺の係数行列式が0でなければならないから、

$$\begin{vmatrix} \kappa^2 - 2\kappa_x^2 & 2\kappa_x\sqrt{(\kappa^2 - \kappa_x^2)} \\ -2\kappa_x\sqrt{(\kappa^2 - \kappa_x^2)} & \kappa^2 - 2\kappa_x^2 \end{vmatrix} = 0 \quad \dots\dots (2.1.84a)$$

または

$$(\kappa^2 - 2\kappa_x^2)^2 + 4\kappa_x^2\{\sqrt{(\kappa^2 - \kappa_x^2)}\}\{\sqrt{(\kappa^2 - \kappa_x^2)}\} = 0 \quad \dots (2.1.84b)$$

と書ける。

ここで問題にしている波動の x 軸方向の波数を、 $\kappa_x = \omega / C_R$  として式(2.1.84)を書き直すと次式となる。

$$\{(C_R/C_T)^2 - 2\}^2 + 4[\sqrt{\{(C_R/C_T)^2 - 1\}}][\sqrt{\{(C_R/C_L)^2 - 1\}}] = 0. \quad \dots\dots\dots (2.1.85)$$

式(2.1.85)の左辺の根号以外は正であるから、式(2.1.85)が成立するためには両根号は虚数でなければならない。このことは、式(2.1.84b) から波数成分  $\kappa_z$ 、 $\kappa_z$  が虚数であることに対応し、式(2.1.73)の関係によって生じた表面波の挙動を示すことが予想できる。

根号内が虚数であるためには

$$C_R < C_T < C_L \quad \dots\dots\dots (2.1.86)$$

である必要があり、このとき式(2.1.85)は

$$\{(C_R/C_T)^2 - 2\}^2 = 4[\sqrt{1 - (C_R/C_T)^2}][\sqrt{1 - (C_R/C_L)^2}] \quad \dots (2.1.87)$$

となる。

式(2.1.87)の両辺を自乗して整理すると次式が得られる。

$$f(\kappa) = \kappa^6 - 8\kappa^4 + 8(3 - 2\tau^{-2})\kappa^2 - 16(1 - \tau^{-2}) = 0. \quad \dots\dots (2.1.88)$$

ここに、 $\kappa = C_R/C_T$ 、 $\tau = C_L/C_T$ である。

式(2.1.88)は  $\kappa^2$  に関する 3 次方程式であるが、 $f(0) < 0$ 、 $f(1) > 0$  であるから、すでに式(2.1.86)で示されたと同様に

$$0 < \kappa < 1 \quad \text{すなわち} \quad C_R < C_T \quad \dots\dots\dots (2.1.89)$$

でなければならない。式(2.1.88)と式(2.1.89)を満足する正の実数解は、ただ一つであることが知られている<sup>2-6, 9)</sup>。

以上から明らかなように、表面波の伝播速度  $C_R$  は横波の伝播速度とポアソン比のみの関数として定まり、振動数または波長に無関係で分散性がない。この表面波は発見者にちなんで Rayleigh 波と呼ばれる。以下では S V 波が臨界角を越えて入射した場合に発生する表面波と区別するために、Rayleigh 表面波または R 表面波と呼ぶ。

なお、 $\kappa$  を推定するためによく用いられる近似式として

$$\kappa = (0.862 + 1.14\nu)/(1 + \nu) \quad \dots\dots\dots (2.1.90)$$

がある<sup>2-10)</sup>。

図-2.1.16 に式(2.1.90) の関係を示す。

## 2) Rayleigh 表面波の粒子運動

R 表面波の位相速度が 1) で導かれたので、ここでは R 表面波による挙動を検討する。

式(2.1.81)のポテンシャルに対応する変位成分は、式(2.1.33)により以下のように得られる。

$$u_x = i \{ A_2 \kappa_x \exp(i k_z z) - B_2 \kappa_z \exp(i \kappa_z z) \} \exp i (\kappa_x x - \omega t), \quad \dots\dots\dots (2.1.91a)$$

$$u_z = i \{ A_2 k_z \exp(i k_z z) + B_2 \kappa_x \exp(i \kappa_z z) \} \exp i (\kappa_x x - \omega t). \quad \dots\dots\dots (2.1.91b)$$

1) で示されたように、ここで考えている表面波に対しては、 $z$  軸方向の波数成分は虚数でなければならず、 $\kappa_z = i \kappa_z'$ 、 $k_z = i k_z'$ 、 $\kappa_x = \omega / C_R = \kappa = \kappa_R$ と書くと、

$$k_z' = \sqrt{(\kappa_R^2 - k^2)} = \kappa_R \sqrt{1 - (\kappa / \tau)^2}, \quad \dots\dots\dots (2.1.92a)$$

$$\kappa_z' = \sqrt{(\kappa_R^2 - \kappa^2)} = \kappa_R \sqrt{1 - \kappa^2} \quad \dots\dots\dots (2.1.92b)$$

の関係がある。

したがって、式(2.1.91)は

$$u_x = i A_2 \{ \kappa_R \exp(-k_z' z) - i (B_2 / A_2) \kappa_z' \exp(-\kappa_z' z) \} \exp i (\kappa_R x - \omega t), \quad \dots\dots\dots (2.1.93a)$$

$$u_z = i A_2 \{ i k_z' \exp(-k_z' z) + (B_2 / A_2) \kappa_R \exp(-\kappa_z' z) \} \exp i (\kappa_R x - \omega t) \quad \dots\dots\dots (2.1.93b)$$

と書ける。

式(2.1.93)は、 $u_x$ 、 $u_z$  の振幅が  $z$  の増加とともに指数関数的に減少することを示し、典型的な表面波の応答であることは、SV波が臨界角を越えて入射した場合の反射P波による挙動と同様である。

式(2.1.83a, b) それぞれの左辺の根号を虚数として  $B_2 / A_2$  を求めると、

$$B_2 / A_2 = i \kappa_R (\kappa^2 - 2) / 2 \kappa_z' = -i l / \beta = -i \alpha / l \quad \dots\dots\dots (2.1.94)$$

であるから、式(2.1.93)に代入すると

$$u_x = i A_2 \kappa_R [\exp(-k_z' z) - l \exp(-\kappa_z' z)] \exp i (\kappa_R x - \omega t), \quad \dots\dots\dots (2.1.95a)$$

$$u_z = -A_2 \kappa_R \alpha [\exp(-k_z' z) - (1/l) \exp(-\kappa_z' z)] \exp i (\kappa_R x - \omega t) \quad \dots\dots\dots (2.1.95b)$$

が得られる。

ここに、

$$\alpha = \sqrt{1 - (\kappa / \tau)^2}, \quad \dots\dots\dots (2.1.96a)$$

$$\beta = \sqrt{1 - \kappa^2}, \quad \dots\dots\dots (2.1.96b)$$

$$l = (2 - \kappa^2) / 2, \quad \dots\dots\dots (2.1.96c)$$

$$\alpha \beta = l^2 \quad \dots\dots\dots (2.1.96d)$$

である。ただし、式(2.1.96d)は式(2.1.87)を書き直したものである。

R表面波の粒子運動は、一般性を失うことなく式(2.1.95)において  $x = 0$  として得られ、それぞれの実部は

$$\operatorname{Re}\{u_x\}_{x=0} = A_2 \kappa_R [\exp(-k_z' z) - l \exp(-\kappa_z' z)] \sin \omega t, \quad (2.1.97a)$$

$$\operatorname{Re}\{u_z\}_{x=0} = -A_2 \kappa_R \alpha [\exp(-k_z' z) - (1/l) \exp(-\kappa_z' z)] \cos \omega t$$

$$\dots\dots\dots (2.1.97b)$$

となるから、粒子運動は楕円である。

また、 $1-l > 0$ 、 $1-(1/l) < 0$  であるので、 $z$  の小さい範囲では  $y$  軸からみて反時計回り方向に回転、すなわち波動の進行方向とは逆回転 (retrograde) することが明かであり、たとえば自由境界の水平動の上下動に対する振幅比は

$$[u_x]/[u_z] = l/\alpha = \beta/l < 1 \quad \dots\dots\dots (2.1.98)$$

である。

したがって、2. 1. 4. 4) で述べた  $SV$  波入射によつて生じる表面波のうち、 $\gamma \cong 45^\circ$  の場合の表面波と  $R$  表面波とは、楕円粒子運動の回転方向が等しい。

$R$  表面波による応力成分は式 (2.1.93) から

$$\sigma_x = \mu A_2 \kappa_R^2 [-(\kappa^2 + 2\alpha^2) \exp(-k_z' z) + 2l \exp(-\kappa_z' z)] \exp i(\kappa_R x - \omega t), \quad (2.1.99a)$$

$$\sigma_z = \mu A_2 \kappa_R^2 (2l) [\exp(-k_z' z) - \exp(-\kappa_z' z)] \exp i(\kappa_R x - \omega t),$$

$$\dots\dots\dots (2.1.99b)$$

$$\tau_{xz} = -i \mu A_2 \kappa_R^2 (2\alpha) [\exp(-k_z' z) - \exp(-\kappa_z' z)] \exp i(\kappa_R x - \omega t)$$

$$\dots\dots\dots (2.1.99c)$$

と表せ、自由境界の応力成分は  $\sigma_x$  のみで

$$[\sigma_x] = [2\tau_{\max}]$$

$$= -\mu A_2 \kappa_R^2 [2\kappa^2 \{1 - (1/\tau)^2\}] \exp i(\kappa_R x - \omega t) \quad \dots\dots (2.1.100)$$

である。

図-2.1.17(a), (b), (c) に、 $\nu = 0.3$  の場合の変位成分と最大せん断応力の分布を、 $x$  方向の 3 断面について示す。ただし、変位成分は原点での  $u_z$  の値を  $u_{z0}$  として基準化し、最大せん断応力も原点での値を  $\tau_0$  として基準化した。また、 $\Lambda$  は Rayleigh 波の波長である。

## 第2章 第2節 平行多層弾性体の平面調和波動

第1節の2. 1. 4. 以下において、平面P波およびS波が任意角度で半無限弾性固体の自由境界へ入射した場合の、反射係数および自由境界近傍の挙動を検討した。ここでは、2種類以上の異なる性質の弾性体が、互いに平行な平面境界で接合された場合の挙動を取り扱う。

### 2. 2. 1. 二つの半無限弾性体が接合された場合

#### 1) P波およびSV波の透過と反射

いま、図-2.2.1.に示すような、それぞれ添え字1, 2を持つ二つの半無限弾性体が接合された場合を考え、境界を挟むそれぞれの領域を第1層および第2層と呼ぶ。まず接合境界をx軸とし、第2層の下方をz軸の正方向とするx, z平面についての平面ひずみ状態を考え、2. 1. 2. 3) で述べたようにP波とSV波のみを対象にする。

ここでは、式(2.1.5a)の代わりに粒子速度ベクトル $v_j$ を、Helmholtzのポテンシャル $\Phi, \Psi_j$ を用いて

$$v_j = \Phi_{,j} + \epsilon_{jmn} \Psi_{n,m}, \quad \Psi_{m,m} = 0 \quad \dots\dots\dots (2.2.1)$$

と表す<sup>2-11)</sup>。

円振動数 $\omega$ 、調和項 $\exp(-i\omega t)$ の平面調和波動を考えると、変位ベクトル $u_j$ と粒子速度ベクトル $v_j$ の関係から

$$\begin{aligned} u_j &= \phi_{,j} + \epsilon_{jmn} \phi_{n,m} \\ &= (i/\omega)(\Phi_{,j} + \epsilon_{jmn} \Psi_{n,m}), \quad \dots\dots\dots (2.2.2a) \end{aligned}$$

$$u_j = i v_j / \omega, \text{ または } v_j = -i \omega u_j \quad \dots\dots\dots (2.2.2b)$$

である。

波動方程式(2.1.25)は、やはり $\Phi, \Psi_j$ がHelmholtzの方程式

$$\Phi_{,jj} + k^2 \Phi = 0, \quad \dots\dots\dots (2.2.3a)$$

$$\Psi_{k,jj} + \kappa^2 \Psi_k = 0 \quad \dots\dots\dots (2.2.3b)$$

を満たすとき満足される。

ここに、 $k$ および $\kappa$ はそれぞれ式(2.1.28)で定義した縦波および横波の、伝播方向の波数ベクトルの大きさである。

対象にしている問題に対しては、ここでも $\Psi_j$ の成分のうち $\Psi_y = \Psi$ のみを考慮すればよいから、粒子速度成分は式(2.2.1)から

$$v_x = \partial \Phi / \partial x - \partial \Psi / \partial z, \quad \dots\dots\dots (2.2.4a)$$

$$v_y = 0, \quad \dots\dots\dots (2.2.4b)$$

$$v_z = \partial \Phi / \partial z + \partial \Psi / \partial x \quad \dots\dots\dots (2.2.4c)$$

と書ける。また、応力成分は式(2.1.26)または式(2.1.27)によって求められる。

図-2.2.1.に示したように、第2層の下方から境界へ向かってP波またはSV波が任意角度で入射する場合を対象にすると、第1層と第2層にはそれぞれ透過波および反射波としてP波およびSV波が存在する。

それぞれの波動に対して、式(2.2.3)を満足する調和波動ポテンシャルを考えると、これらの波動は式(2.1.32)と同様に層番号を添え字 ( $n=1, 2$ ) として、一般に以下のように表せる。

$$\begin{aligned}\Phi_n &= \{\Phi_n' \exp(i \alpha_n z) + \Phi_n'' \exp(-i \alpha_n z)\} \exp i(\delta_n x - \omega t), \\ &= \{E_n' + E_n''\} \exp i(\delta_n x - \omega t), \quad \dots\dots\dots (2.2.5a)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Psi_n &= \{\Psi_n' \exp(i \beta_n z) + \Psi_n'' \exp(-i \beta_n z)\} \exp i(\delta_n x - \omega t), \\ &= \{F_n' + F_n''\} \exp i(\delta_n x - \omega t). \quad \dots\dots\dots (2.2.5b)\end{aligned}$$

ここに、

$$E_n' = \Phi_n' \exp(i \alpha_n z), \quad E_n'' = \Phi_n'' \exp(-i \alpha_n z), \quad \dots\dots\dots (2.2.5c)$$

$$F_n' = \Psi_n' \exp(i \beta_n z), \quad F_n'' = \Psi_n'' \exp(-i \beta_n z) \quad \dots\dots\dots (2.2.5d)$$

であり、 $\Phi_n'$ 、 $\Psi_n'$ および $\Phi_n''$ 、 $\Psi_n''$ は、それぞれz軸の正および負方向に伝播する波動に対するポテンシャルの振幅で、一般に複素数である。また、 $\alpha_n$ 、 $\beta_n$ はそれぞれ波数ベクトル $k$ および $\kappa$ のz方向の波数成分で、縦波と横波の伝播方向とz軸との角度をそれぞれ $\theta_n$ 、 $\gamma_n$ とすると

$$\alpha_n = k_n \cos \theta_n = \sqrt{(k_n^2 - \delta_n^2)}, \quad \dots\dots\dots (2.2.6a)$$

$$\beta_n = \kappa_n \cos \gamma_n = \sqrt{(\kappa_n^2 - \delta_n^2)} \quad \dots\dots\dots (2.2.6b)$$

であり、 $\theta_1$ と $\gamma_1$ はそれぞれP波およびSV波の透過角と呼ばれる。

ここに、 $\delta_n$ はx方向の波数成分で、式(2.1.39)で示した理由により層番号に無関係に一定で、以下では $\delta$ と書くことにするが、

$$\delta_1 = k_1 \sin \theta_1 = \kappa_1 \sin \gamma_1 = k_2 \sin \theta_2 = \kappa_2 \sin \gamma_2 = \delta_2 \equiv \delta \quad \dots (2.2.7a)$$

または

$$\sin \theta_1 / C_{L1} = \sin \gamma_1 / C_{T1} = \sin \theta_2 / C_{L2} = \sin \gamma_2 / C_{T2} \quad \dots\dots\dots (2.2.7b)$$

でなければならず、式(2.2.7)はこの場合のSnellの法則である。

ここで対象にしている問題に対しては、2. 1. 4. 2)で述べた臨界角がSV波の入射角のみならずP波の入射角にも存在する。

表-2.2.1 (次頁)に、第2層から第1層へP波またはSV波が入射する場合の入射角が、透過波および反射波に対して臨界角となる場合を示す。この表に示すように、透過波または反射波に対して入射角が臨界角を越えるか越えないかについて8種類の条件がある。

結局、半無限弾性体の場合に比較して、一つの境界を持つ非均質弾性体の場合には、P波およびSV波両入射波に臨界角が生じ、最大3種類の非均質波が同時に存在し得る。これらの非均質波は境界から内部に向かって表面波の場合と同様の挙動を示し、境界波と呼ばれる。

したがって、たとえばSV波が入射する場合に、透過P波に対して $\sin \theta_1 \geq 1$ となると



表-2.2.1 1境界を挟む2層問題において入射角が臨界角となる場合

条 件 式	第2層からの入射波	入射角	第1層の透過波		第2層の反射P波
			P波	SV波	
① $C_{L1}\sin\theta_2/C_{L2}\leq 1$	P波	$\theta_2$	-	-	-
② $C_{L1}\sin\theta_2/C_{L2}\geq 1$	P波	$\theta_2$	○	-	-
③ $C_{T1}\sin\theta_2/C_{L2}\geq 1$	P波	$\theta_2$	○	○	-
④ $\tau_2\sin\gamma_2\leq 1$ かつ $C_{L1}\sin\gamma_2/C_{T2}\leq 1$	SV波	$\gamma_2$	-	-	-
⑤ $\tau_2\sin\gamma_2\geq 1\geq C_{L1}\sin\gamma_2/C_{T2}$	SV波	$\gamma_2$	-	-	○
⑥ $C_{L1}\sin\gamma_2/C_{T2}\geq 1\geq \tau_2\sin\gamma_2$	SV波	$\gamma_2$	○	-	-
⑦ $C_{T1}\sin\gamma_2/C_{T2}\geq 1\geq \tau_2\sin\gamma_2$	SV波	$\gamma_2$	○	○	-
⑧ $\tau_2\sin\gamma_2\geq 1$ かつ $C_{T1}\sin\gamma_2/C_{T2}\geq 1$	SV波	$\gamma_2$	○	○	○

$$\tau_n = C_{Ln}/C_{Tn} \quad (n=1, 2)$$

○：その波動に対して入射角が臨界角を越える。

-：その波動に対して入射角が臨界角を越えない。

きには、式(2.1.71a,b)と同様に

$$\cos \theta_1 = i \sqrt{(\sin^2 \theta_1 - 1)} = i \sqrt{\{(C_{L1} \sin \gamma_2 / C_{T2})^2 - 1\}} \quad \cdots (2.2.8)$$

と考えれば良い。他の透過波または反射波についても同様である。

第  $n$  層 ( $n=1, 2$ ) の粒子速度成分および応力成分は、式(2.2.5) を式(2.2.4) および式(2.1.26)に代入して、以下のように表せる。

$$v_{xn} = i \{ \delta (E_n' + E_n'') - \beta_n (F_n' - F_n'') \} \exp i (\delta x - \omega t), \quad (2.2.9a)$$

$$v_{zn} = i \{ \alpha_n (E_n' - E_n'') + \delta (F_n' + F_n'') \} \exp i (\delta x - \omega t), \quad (2.2.9b)$$

$$\sigma_{xn} = - (i / \omega) [ \{ \lambda_n \alpha_n^2 + (\lambda_n + 2\mu_n) \delta^2 \} (E_n' + E_n'') - 2\mu_n \beta_n \delta (F_n' - F_n'') ] \exp i (\delta x - \omega t), \quad \cdots (2.2.9c)$$

$$\sigma_{zn} = - (i / \omega) [ \{ \lambda_n \delta^2 + (\lambda_n + 2\mu_n) \alpha_n^2 \} (E_n' + E_n'') + 2\mu_n \beta_n \delta (F_n' - F_n'') ] \exp i (\delta x - \omega t), \quad \cdots (2.2.9d)$$

$$\tau_{xzn} = - (2i / \omega) \mu_n \{ \alpha_n \delta (E_n' - E_n'') - (\beta_n^2 - \delta^2) (F_n' + F_n'') / 2 \} \exp i (\delta x - \omega t). \quad \cdots (2.2.9e)$$

式(2.2.9)をパラメータ間の関係を用いて、次式のように表現することもできる。

$$v_{xn} = i \kappa_n \{ (E_n' + E_n'') \sin \gamma_n - (F_n' - F_n'') \cos \gamma_n \} \exp i (\delta x - \omega t), \quad \cdots (2.2.10a)$$

$$v_{zn} = i k_n \{ (E_n' - E_n'') \cos \theta_n + (F_n' + F_n'') \sin \theta_n \} \exp i (\delta x - \omega t), \quad \cdots (2.2.10b)$$

$$\sigma_{xn} = - i \omega \rho_n \{ (E_n' + E_n'') (1 - 2 \cos^2 \theta_n / \tau_n^2) - (F_n' - F_n'') \sin 2 \gamma_n \} \times \exp i (\delta x - \omega t), \quad \cdots (2.2.10c)$$

$$\sigma_{zn} = - i \omega \rho_n \{ (E_n' + E_n'') \cos 2 \gamma_n + (F_n' - F_n'') \sin 2 \gamma_n \} \exp i (\delta x - \omega t), \quad \cdots (2.2.10d)$$

$$\tau_{xzn} = - i \omega \rho_n \{ (E_n' - E_n'') \sin 2 \theta_n / \tau_n^2 - (F_n' + F_n'') \cos 2 \gamma_n \} \times \exp i (\delta x - \omega t). \quad \cdots (2.2.10e)$$

式(2.2.10)において、 $z=0$ とすると境界の値が得られ、境界条件すなわち連続条件および力の釣合条件は、 $z=0$ において

$$v_{x1} = v_{x2}, \quad v_{z1} = v_{z2}, \quad \cdots (2.2.11a)$$

$$\sigma_{z1} = \sigma_{z2}, \quad \tau_{xz1} = \tau_{xz2} \quad \cdots (2.2.11b)$$

である。

## 2) P波が入射する場合。

いま、第2層から境界へP波が入射角  $\theta_2$  で入射する場合を考えると、それぞれの層が半無限領域であるため、ここで設定した問題に対しては式(2.2.9)において、

$$\Phi_1' = \Psi_1' = \Psi_2'' = 0 \quad \text{または} \quad E_1' = F_1' = F_2'' = 0 \quad \cdots (2.2.12)$$

である。

したがって、式(2.2.9) は式(2.2.5c,d)を考えて、

$$\delta \Phi_1'' + \beta_1 \Psi_1'' - \delta (\Phi_2' + \Phi_2'') + \beta_2 \Psi_2' = 0, \quad \dots\dots\dots (2.2.13a)$$

$$\alpha_1 \Phi_1'' - \delta \Psi_1'' + \alpha_2 (\Phi_2' - \Phi_2'') + \delta \Psi_2' = 0, \quad \dots\dots\dots (2.2.13b)$$

$$\mu_1 \{ \kappa_1^2 \cos 2\gamma_1 \Phi_1'' - 2\beta_1 \delta \Psi_1'' \} \\ - \mu_2 \{ \kappa_2^2 \cos 2\gamma_2 (\Phi_2' + \Phi_2'') + 2\beta_2 \delta \Psi_2' \} = 0, \quad (2.2.13c)$$

$$\mu_1 \{ \alpha_1 \delta \Phi_1'' + \kappa_1^2 \cos 2\gamma_1 \Psi_1'' / 2 \} \\ + \mu_2 \{ \alpha_2 \delta (\Phi_2' - \Phi_2'') - \kappa_2^2 \cos 2\gamma_2 \Psi_2' / 2 \} = 0 \quad (2.2.13d)$$

となる。

入射P波の振幅は $\Phi_2''$ であるから、透過波と反射波の振幅の $\Phi_2''$ に対する比を、それぞれ

$$T_{PP} = \Phi_1'' / \Phi_2'', \quad T_{PS} = \Psi_1'' / \Phi_2'', \quad \dots\dots\dots (2.2.14a)$$

$$R_{PP} = \Phi_2' / \Phi_2'', \quad R_{PS} = \Psi_2' / \Phi_2'' \quad \dots\dots\dots (2.2.14b)$$

とすると、これらはそれぞれ入射P波に対する透過P波、透過SV波および反射P波、反射SV波の、ポテンシャルの振幅の透過係数および反射係数である。

式(2.2.13)から、透過係数と反射係数の係数行列を[P]とすると、以下のように書ける。

$$[P]\{TR_P\} = \{I\}. \quad \dots\dots\dots (2.2.15)$$

ここに、係数行列[P]は

$$[P] = \begin{pmatrix} 1 & \cos \gamma_1 / \sin \gamma_1 & -1 & \cos \gamma_2 / \sin \gamma_2 \\ C_{L21} \cos \theta_{12} & -\sin \theta_2 / \cos \theta_2 & 1 & \sin \theta_2 / \cos \theta_2 \\ \rho_{12} \cos 2\gamma_{12} & -\rho_{12} \sin 2\gamma_1 / \cos 2\gamma_2 & -1 & -\sin 2\gamma_2 / \cos 2\gamma_2 \\ \rho_{12} \tau_{21}^2 \sin 2\theta_{12} & \tau_2^2 \rho_{12} \cos 2\gamma_1 / \sin 2\theta_2 & 1 & -\tau_2^2 \cos 2\gamma_2 / \sin 2\theta_2 \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots (2.2.16a)$$

であり、各要素に含まれる表現は

$$C_{L21} = C_{L2} / C_{L1}, \quad \rho_{12} = \rho_1 / \rho_2, \quad \mu_{12} = \mu_1 / \mu_2, \quad \tau_{21} = \tau_2 / \tau_1, \quad \tau_n = C_{Ln} / C_{Tn} \quad \dots\dots\dots (2.2.16b)$$

$$\cos \theta_{12} = \cos \theta_1 / \cos \theta_2, \quad \cos 2\gamma_{12} = \cos 2\gamma_1 / \cos 2\gamma_2, \quad \sin 2\gamma_{12} = \sin 2\gamma_1 / \sin 2\gamma_2 \quad \dots\dots\dots (2.2.16c)$$

である。

また、式(2.2.15)の残りの列ベクトルは、それぞれ

$$\{TR_P\}^T = \{T_{PP} \quad T_{PS} \quad R_{PP} \quad R_{PS}\}, \quad \dots\dots\dots (2.2.16d)$$

$$\{I\}^T = \{1 \quad 1 \quad 1 \quad 1\} \quad \dots\dots\dots (2.2.16e)$$

である。ただし $\{ \}^T$ は $\{ \}$ の転置を表す。

したがって、透過係数と反射係数は

$$\{TR_P\} = [P]^{-1} \{I\} \quad \dots\dots\dots (2.2.17)$$

となり、 $\{TR_P\}$ に対応する $[P]^{-1}$ の各行の和として求められる。式(2.2.16a)では[P]の要素を各層の伝播速度比と密度比および伝播角（入・反射角、透過角）のみで示した。

なお、粒子変位と粒子速度は、それぞれの透過係数および反射係数が等しく、入射P波

の粒子速度の振幅  $V_{P0} = k_2 \Phi_2''$  に対するそれぞれを,  $t_{PP}$ ,  $t_{PS}$ ,  $r_{PP}$ ,  $r_{PS}$  とすると, ポテンシャルの透過・反射係数との関係は,

$$t_{PP} = k_1 \Phi_1'' / k_2 \Phi_2'' = (k_1 / k_2) T_{PP}, \quad \dots\dots\dots (2.2.18a)$$

$$t_{PS} = \kappa_1 \Psi_1'' / k_2 \Phi_2'' = (\kappa_1 / k_2) T_{PS}, \quad \dots\dots\dots (2.2.18b)$$

$$r_{PP} = k_2 \Phi_2' / k_2 \Phi_2'' = R_{PP}, \quad \dots\dots\dots (2.2.18c)$$

$$r_{PS} = \kappa_2 \Psi_2' / k_2 \Phi_2'' = \tau_2 R_{PS} \quad \dots\dots\dots (2.2.18d)$$

である。

また, 入射P波の最大せん断応力の振幅は  $\tau_{P0} = \omega \rho_2 \Phi_2'' / \tau_2^2$  であるから, 最大せん断応力の透過・反射係数を, それぞれ  $\Sigma t_{PP}$ ,  $\Sigma t_{PS}$ ,  $\Sigma r_{PP}$ ,  $\Sigma r_{PS}$  とすると, ポテンシャルの透過・反射係数との関係は,

$$\Sigma t_{PP} = \rho_1 \tau_2^2 T_{PP} / \rho_2 \tau_1^2, \quad \dots\dots\dots (2.2.18e)$$

$$\Sigma t_{PS} = \rho_1 \tau_2^2 T_{PS} / \rho_2, \quad \dots\dots\dots (2.2.18f)$$

$$\Sigma r_{PP} = R_{PP}, \quad \dots\dots\dots (2.2.18g)$$

$$\Sigma r_{PS} = \tau_2^2 R_{PS} \quad \dots\dots\dots (2.2.18h)$$

である。

図-2.2.2 (a)に, 一例として,  $\rho_1 = \rho_2$ ,  $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$ ,  $2\rho_1 C_{T1} = \rho_2 C_{T2}$  の場合について, 第2層からP波が入射するとき, ポテンシャルおよび最大せん断応力の透過・反射係数を示す。また, (b)に境界の変位成分と最大せん断応力を示す。

### 3) SV波が入射する場合

第2層から境界へSV波が入射角  $\gamma_2$  で入射する場合を考える。このとき式(2.2.12)に対応する関係は

$$\Phi_1' = \Psi_1' = \Phi_2'' = 0 \quad \text{または} \quad E_1' = F_1' = E_2'' = 0 \quad \dots\dots\dots (2.2.19)$$

である。

この場合, 入射SV波に対する透過P波・SV波および反射P波・SV波の, ポテンシャルの振幅の透過係数と反射係数を, それぞれ

$$T_{SP} = \Phi_1'' / \Psi_2'', \quad T_{SS} = \Psi_1'' / \Psi_2'', \quad \dots\dots\dots (2.2.20a)$$

$$R_{SP} = \Phi_2' / \Psi_2'', \quad R_{SS} = \Psi_2' / \Psi_2'' \quad \dots\dots\dots (2.2.20b)$$

として, 式(2.2.15)と同様に透過係数と反射係数の係数行列を  $[S]$  とすると, 次式のように書ける。

$$[S]\{T_s\} = \{I\}. \quad \dots\dots\dots (2.2.21)$$

ここに, 式(2.2.16b,c) とともに

$$[S] = \begin{bmatrix} \sin \gamma_2 / \cos \gamma_2 & C_{T21} \cos \gamma_{12} & -\sin \gamma_2 / \cos \gamma_2 & 1 \\ -\cos \theta_1 / \sin \theta_1 & 1 & -\cos \theta_2 / \sin \theta_2 & -1 \\ -\rho_{12} \cos 2\gamma_1 / \sin 2\gamma_2 & \rho_{12} \sin 2\gamma_{12} & \cos 2\gamma_2 / \sin 2\gamma_2 & 1 \\ \rho_{12} \sin 2\theta_1 / \tau_1^2 \cos 2\gamma_2 & \rho_{12} \cos 2\gamma_{12} & \sin 2\theta_2 / \tau_2^2 \cos 2\gamma_2 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} \{T R_s\}^T &= \{T_{SP} \quad T_{SS} \quad R_{SP} \quad R_{SS}\}, & \dots\dots\dots (2.2.22a) \\ \{I\}^T &= \{1 \quad 1 \quad 1 \quad 1\} & \dots\dots\dots (2.2.22b) \\ \{I\}^T &= \{1 \quad 1 \quad 1 \quad 1\} & \dots\dots\dots (2.2.22c) \end{aligned}$$

である。

したがって、透過係数と反射係数は

$$\{T R_s\} = [S]^{-1} \{I\} \quad \dots\dots\dots (2.2.23)$$

と表され、 $\{T R_s\}$ に対応する $[S]^{-1}$ の各行の和として求められる。

なお、粒子変位と粒子速度は、それぞれの透過係数および反射係数が等しく、入射SV波の粒子速度の振幅 $V_{s0} = \kappa_2 \Psi_2''$ に対するそれぞれを、 $t_{SP}$ ,  $t_{SS}$ ,  $r_{SP}$ ,  $r_{SS}$  とすると、ポテンシャルの透過・反射係数との関係は

$$t_{SP} = k_1 \Phi_1'' / \kappa_2 \Psi_2'' = k_1 T_{SP} / \kappa_2, \quad \dots\dots\dots (2.2.24a)$$

$$t_{SS} = \kappa_1 \Psi_1'' / \kappa_2 \Psi_2'' = \kappa_1 T_{SS} / \kappa_2, \quad \dots\dots\dots (2.2.24b)$$

$$r_{SP} = k_2 \Phi_2' / \kappa_2 \Psi_2'' = R_{SP} / \tau_2, \quad \dots\dots\dots (2.2.24c)$$

$$r_{SS} = \kappa_2 \Psi_2' / \kappa_2 \Psi_2'' = R_{SS} \quad \dots\dots\dots (2.2.24d)$$

である。

また、最大せん断応力の透過・反射係数を、それぞれ $\Sigma t_{SP}$ ,  $\Sigma t_{SS}$ ,  $\Sigma r_{SP}$ ,  $\Sigma r_{SS}$  とすると、入射SV波の最大せん断応力の振幅は $\tau_{s0} = \omega \rho_2 \Psi_2''$  であるから、ポテンシャルの透過・反射係数との関係は、

$$\Sigma t_{SP} = \rho_1 T_{SP} / \rho_2 \tau_1^2, \quad \dots\dots\dots (2.2.24e)$$

$$\Sigma t_{SS} = \rho_1 T_{SS} / \rho_2, \quad \dots\dots\dots (2.2.24f)$$

$$\Sigma r_{SP} = R_{SP} / \tau_2^2, \quad \dots\dots\dots (2.2.24g)$$

$$\Sigma r_{SS} = R_{SS} \quad \dots\dots\dots (2.2.24h)$$

である。

図-2.2.3 (a)に、P波の例と同様に、 $\rho_1 = \rho_2$ ,  $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$ ,  $2\rho_1 C_{T1} = \rho_2 C_{T2}$  の場合について、第2層から境界へSV波が入射するときの、ポテンシャルおよび最大せん断応力の透過・反射係数を示す。また、(b)に境界での変位成分と最大せん断応力を示す。

式(2.2.17)と式(2.2.23)において、一般に右辺の逆行列の要素を陽に求めることは困難であり、より一般的な方法を次節2. 2. 2. で述べる。

#### 4) 境界波 (Stoneley Wave)

ここでは、2. 1. 5. で表面波 (Rayleigh Wave) を導いたと同様に、入射波の存在とは無関係に、境界からの距離と共に振幅が指数関数的に減少し、境界に沿って伝播する波動を導く。

いま、その様な波動の伝播速度を $C_s$ , 波数を $\kappa_s = \delta = \omega / C_s$  とすると、表面波と同様の挙動をするとき、式(2.2.5)における $z$ 方向の波数成分は正の純虚数でなければなら

ないから,

$$C_s < \min.\{C_{T1}, C_{T2}\} \quad \dots\dots\dots (2.2.25)$$

として

$$\alpha_n = i\sqrt{(\kappa_s^2 - k_n^2)} = i\kappa_s\sqrt{(1 - \kappa_{sn}^2/\tau_n^2)} = i\alpha_n', \quad \dots\dots (2.2.26a)$$

$$\beta_n = i\sqrt{(\kappa_s^2 - \kappa_n^2)} = i\kappa_s\sqrt{(1 - \kappa_{sn}^2)} = i\beta_n' \quad \dots\dots\dots (2.2.26b)$$

と置ける.

ここに,

$$\kappa_{sn} = C_s/C_{Tn} \quad (n=1, 2) \quad \dots\dots\dots (2.2.27)$$

である.

入射波に無関係であることから, 式(2.2.10)において  $E_1' = F_1' = 0$  および  $E_2'' = F_2'' = 0$  とし,  $z = 0$  で式(2.2.11)の境界条件を適用すると,

$$\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{1 - \kappa_{s1}^2} \\ \sqrt{1 - (\kappa_{s1}/\tau_1)^2} & 1 \\ \kappa_{s1}^2 - 2 & -2\sqrt{1 - \kappa_{s1}^2} \\ 2\sqrt{1 - (\kappa_{s1}/\tau_1)^2} & -(\kappa_{s1}^2 - 2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{1 - \kappa_{s2}^2} \\ \sqrt{1 - (\kappa_{s2}/\tau_2)^2} & -1 \\ -\mu_{21}(\kappa_{s2}^2 - 2) & -2\mu_{21}\sqrt{1 - \kappa_{s2}^2} \\ 2\mu_{21}\sqrt{1 - (\kappa_{s2}/\tau_2)^2} & \mu_{21}(\kappa_{s2}^2 - 2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1'' \\ i\phi_1'' \\ \phi_2' \\ i\phi_2' \end{pmatrix} = 0 \quad \dots\dots\dots (2.2.28)$$

と書ける.

ここに,  $\mu_{21} = \mu_2/\mu_1 = \rho_2 C_{T2}^2/\rho_1 C_{T1}^2$  である.

式(2.2.28)が意味のある解を持つためには, 左辺の係数行列を  $[S_t]$  として,

$$\det[S_t] = 0 \quad \dots\dots\dots (2.2.29)$$

でなければならない.

式(2.2.25)を満足する式(2.2.29)の  $C_s$  の実数解が存在すれば, Stoneley Wave と呼ばれる境界波が存在する.

しかし, この境界波は境界を挟む両媒体の性質が特別な場合にのみ存在し, 地震学上よく現れる両媒体の密度比が1に近い場合には, せん断弾性係数がほぼ等しい場合にのみ存在すること, また横波の伝播速度が小さい方の媒体の横波伝播速度を  $C_T'$ , その媒体の Rayleigh Wave の伝播速度を  $C_R'$  とするとき,

$$C_R' < C_s < C_T' \quad \dots\dots\dots (2.2.30)$$

の関係があることが分かっている<sup>2-6, 7, 9)</sup>.

式(2.2.28)から明らかなように,  $C_s$  の解は波数すなわち  $\omega$  に無関係であるから, この境界波は Rayleigh Wave と同様に非分散性であることが分かる.

$C_s$  の実数解が得られると式(2.2.28)から、たとえば  $\phi_1''$  を基準値として  $\phi_1''$ ,  $\phi_2'$ ,  $\phi_2'$  の比が得られ、変位成分と応力成分は式(2.2.10)において、 $\delta = \omega/C_s$  および式(2.2.26)と式(2.2.27)の關係を用いて得られる。

#### 5) SH波が入射する場合

2. 1. 4. 5) で述べたように、SH波を表現する場合はポテンシャルを用いるより、粒子変位または粒子速度を直接用いる方が便利であるので、ここでは3) に対応させて粒子速度  $v_y$  を用いると、兩層の粒子速度は式(2.2.5) と同様に、 $n=1, 2$ として

$$v_{yn} = \{D_n' \exp(i \beta_n z) + D_n'' \exp(-i \beta_n z)\} \exp i(\delta x - \omega t), \quad \dots\dots\dots (2.2.31a)$$

粒子変位は

$$u_{yn} = i v_{yn} / \omega, \quad \dots\dots\dots (2.2.31b)$$

また、せん断応力は式(2.1.26e)から

$$\tau_{yzn} = -(1/\omega) \mu_n \beta_n \{D_n' \exp(i \beta_n z) - D_n'' \exp(-i \beta_n z)\} \exp i(\delta x - \omega t) \quad \dots\dots\dots (2.2.31c)$$

と書ける。

ここに、 $D_n'$ ,  $D_n''$  はそれぞれの層内で  $z$  軸の正および負方向に伝播するSH波による粒子速度の振幅、 $\beta_n = \kappa_n \cos \gamma_n = \sqrt{(\kappa_n^2 - \delta^2)}$  である。また、式(2.2.31)を書き下す際にこの場合の Snellの法則

$$\sin \gamma_1 / C_{T1} = \sin \gamma_2 / C_{T2} \quad \dots\dots\dots (2.2.32)$$

を用いている。

境界の連続条件と釣合条件は  $z = 0$  において以下となる。

$$v_{y1} = v_{y2}, \quad \dots\dots\dots (2.2.33a)$$

$$\tau_{yz1} = \tau_{yz2}. \quad \dots\dots\dots (2.2.33b)$$

いま、第2層から境界へSH波が入射角  $\gamma_2$  で入射する場合を考えると、式(2.2.31)において

$$D_1' = 0 \quad \dots\dots\dots (2.2.34)$$

である。

したがって、式(2.2.33)からSH波の粒子速度または粒子変位の透過係数  $t_{HH}$  と反射係数  $r_{HH}$  は、それぞれ以下となる。

$$\begin{aligned} t_{HH} &= D_1'' / D_2'' \\ &= 2\mu_2 \beta_2 / (\mu_1 \beta_1 + \mu_2 \beta_2) \\ &= 2 / \{1 + (\rho C_T)_{12} \cos \gamma_{12}\}, \quad \dots\dots\dots (2.2.35a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_{HH} &= D_1'' / D_2'' \\ &= (\mu_2 \beta_2 - \mu_1 \beta_1) / (\mu_2 \beta_2 + \mu_1 \beta_1) \\ &= \{1 - (\rho C_T)_{12} \cos \gamma_{12}\} / \{1 + (\rho C_T)_{12} \cos \gamma_{12}\}. \quad \dots\dots\dots (2.2.35b) \end{aligned}$$

ここに、 $(\rho C_T)_{12} = \rho_1 C_{T1} / \rho_2 C_{T2}$ ,  $\cos \gamma_{12} = \cos \gamma_1 / \cos \gamma_2$ である。

これら透過係数と反射係数を用いると、両層の粒子速度は以下のように書ける。

$$v_{y1} = D_2'' t_{HH} \exp(i \beta_1 z_1) \exp i(\delta x - \omega t), \quad \dots\dots\dots (2.2.36a)$$

$$v_{y2} = D_2'' \{ r_{HH} \exp(i \beta_2 z) + \exp(-i \beta_2 z) \} \exp i(\delta x - \omega t). \quad \dots\dots\dots (2.2.36b)$$

ここに、 $z_1 = -z$  は第1層内の境界からの距離である。

Snellの法則である式(2.2.32)から明らかなように、

$$\sin \gamma_1 = (C_{T1} / C_{T2}) \sin \gamma_2 \geq 1 \quad \dots\dots\dots (2.2.37a)$$

のとき、入射角  $\gamma_2$  は臨界角となる。

$\gamma_2 \geq \gamma_c$  の場合には

$$\cos \gamma_1 = i \sqrt{\{(C_{T1} / C_{T2})^2 \sin^2 \gamma_2 - 1\}} = i \gamma_H \quad \dots\dots\dots (2.2.37b)$$

として、式(2.1.72)と同様に  $|r_{HH}| = 1$  となるから

$$v_{y1} = D_2'' |t_{HH}| \exp(-\kappa_1 \gamma_H z_1) \exp i(\delta x - \omega t - \varphi_H), \quad \dots\dots (2.2.38a)$$

$$v_{y2} = D_2'' \{ \exp(-2i \varphi_H) \exp(i \beta_2 z) + \exp(-i \beta_2 z) \} \exp i(\delta x - \omega t) \\ = 2D_2'' \cos(\beta_2 z - \varphi_H) \exp i(\delta x - \omega t - \varphi_H) \quad \dots\dots\dots (2.2.38b)$$

と書ける。

ここに、

$$|t_{HH}| = 2 / \sqrt{[1 + \{(\rho C_T)_{12} \cos \gamma_{12}\}]^2}, \quad \dots\dots\dots (2.2.39a)$$

$$\varphi_H = \arg\{1 + (\rho C_T)_{12} \cos \gamma_{12}\} \quad \dots\dots\dots (2.2.39b)$$

である。

式(2.2.38)は、入射角が臨界角を越えるとき透過SH波の寄与として、第1層内には境界からの距離とともに振幅が指数関数的に減衰する波動が伝播し、反射SH波の寄与は入射波と同じ振幅で位相が透過波の2倍遅れ、第2層内でz方向に定常状態を生じることを示している。

## 2. 2. 2. 平行多層弾性体の調和P波およびSV波<sup>2-11,12,13,14,15)</sup>

### 1) P波およびSV波の伝達行列

2. 2. 1. では、一つの平面境界を挟む非均質弾性体の場合を検討したが、ここでは平行多層弾性体の場合を対象にする。

式(2.2.16c) , 式(2.2.22c) , 式(2.2.35)から明らかなように、いずれの場合にも半無限弾性体の場合と同様に、透過係数と反射係数は入射波の円振動数に独立である。この性質は両層が無限の広がりを持ち、一度透過または反射した波動は再び境界へ戻ってくることがないという条件、すなわち放射条件を満足すると考えられる場合に現れる。しかし、ここで対象にする多層問題においては、層境界間を繰り返し往復（重複反射）する波動が存在するため、前記の状態と全く異なり入射波の円振動数が波動挙動を支配する。特に、



一方の境界が自由境界である場合は、地表付近の地盤状態に対応すると考えられるから、地盤の固有振動数、振動数応答関数など、地震工学的に極めて重要な問題を含むことになる。

いま、図-2.2.4 に示すように  $x$  軸に平行な  $n$  個の層境界を持つ  $n+1$  層問題を考え、第  $n$  層の下部境界を境界  $(n)$ 、上部境界を境界  $(n-1)$  と呼び、境界  $(n)$  から下向きに座標  $z_{n+1}$  を取る。

第  $n$  層に注目すると、境界  $(n-1)$  を  $x$  軸とし、層厚を  $d_n$  とするとき、第  $n$  層の内部には、それぞれ  $z$  軸の正および負方向の伝播成分を持つ  $P$  波、 $SV$  波が存在する。

そこで、まず境界  $(n)$  と境界  $(n-1)$  における式(2.2.10)の左辺の各成分の関係、すなわち伝達行列を求める。

任意層において、式(2.2.5) と式(2.2.10)はそのまま満足されるから、式(2.2.10)において  $z = d_n$  とし、その結果式(2.2.5e,f)に含まれる  $\exp(i\alpha_n d_n)$  などを実部と虚部に分け、共通項  $\exp(\delta x - i\omega t)$  を省いて表すと、境界  $(n)$  の各成分の値が、第  $n$  層内の波動ポテンシャルと層パラメータを用いて以下のように表される。

$$\begin{pmatrix} v_x^{(n)} \\ v_z^{(n)} \\ \sigma_z^{(n)} \\ \tau_{xz}^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta \cos P_n & -\delta \sin P_n \\ -\alpha \sin P_n & i\alpha_n \cos P_n \\ -i(\lambda_n k_n^2 + 2\mu_n \alpha_n^2) \cos P_n / \omega & (\lambda_n k_n^2 + 2\mu_n \alpha_n^2) \sin P_n / \omega \\ 2\mu_n \alpha_n \delta \sin P_n / \omega & -2i\mu_n \alpha_n \delta \cos P_n / \omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_n' + \phi_n'' \\ \phi_n' - \phi_n'' \\ \psi_n' - \psi_n'' \\ \psi_n' + \psi_n'' \end{pmatrix} \quad (2.2.40)$$

ここに、 $P_n = \alpha_n d_n$ 、 $Q_n = \beta_n d_n$  である。

一方、境界  $(n-1)$  での粒子速度と応力の各成分は、 $z_n = 0$ 、すなわち  $P_n = Q_n = 0$  とし、式(2.2.40)から第  $n$  層のパラメータの値を用いて次式のように得られる。

$$\begin{pmatrix} v_x^{(n-1)} \\ v_z^{(n-1)} \\ \sigma_z^{(n-1)} \\ \tau_{xz}^{(n-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\delta & 0 \\ 0 & i\alpha_n \\ -i(\lambda_n k_n^2 + 2\mu_n \alpha_n^2) / \omega & 0 \\ 0 & -2i\mu_n \alpha_n \delta / \omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_n' + \phi_n'' \\ \phi_n' - \phi_n'' \\ \psi_n' - \psi_n'' \\ \psi_n' + \psi_n'' \end{pmatrix} \quad (2.2.41)$$

.....(2.2.41)

式(2.2.41)の右辺の係数行列の逆行列を求めて、第  $n$  層のポテンシャルの組を求めると、

$$\begin{pmatrix} \phi_n' + \phi_n'' \\ \phi_n' - \phi_n'' \\ \psi_n' - \psi_n'' \\ \phi_n' + \phi_n'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2i\delta/\kappa_n^2 & 0 \\ 0 & i(\delta^2 - \beta_n^2)/\alpha_n\kappa_n^2 \\ i\{k_n^2(\lambda_n/\mu_n) + \alpha_n^2\}/\beta_n\kappa_n^2 & 0 \\ 0 & -2i\delta/\kappa_n^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} i\omega/\mu_n\kappa_n^2 & 0 \\ 0 & i\omega\delta/\mu_n\alpha_n\kappa_n^2 \\ i\delta\omega\beta_n/\mu_n\kappa_n^2 & 0 \\ 0 & -i\omega/\mu_n\kappa_n^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x^{(n-1)} \\ v_z^{(n-1)} \\ \sigma_z^{(n-1)} \\ \tau_{xz}^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

.....(2.2.42)

となる。

結局、式(2.2.41)と式(2.2.42)からポテンシャルの組を消去すると、第  $n$  層を挟む上境界と下境界の各成分間の関係は、係数行列がその層を挟む両境界の粒子速度と応力成分に関する第  $n$  層の伝達行列となって、次式で表される。

$$\begin{pmatrix} v_x^{(n)} \\ v_z^{(n)} \\ \sigma_z^{(n)} \\ \tau_{xz}^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x^{(n-1)} \\ v_z^{(n-1)} \\ \sigma_z^{(n-1)} \\ \tau_{xz}^{(n-1)} \end{pmatrix}. \quad \dots\dots(2.2.43)$$

ここに、右辺の係数行列の要素  $a_{jk}$  ( $j, k=1\sim 4$ ) は、パラメータ間の関係を考慮すると以下である。

$$\begin{aligned} a_{11} &= 2\sin^2\gamma_n \cos P_n + \cos 2\gamma_n \cos Q_n, \\ a_{12} &= i(\tan\theta_n \cos 2\gamma_n \sin P_n - \sin 2\gamma_n \sin Q_n), \\ a_{13} &= \sin\gamma_n(\cos Q_n - \cos P_n)/Z_n, \\ a_{14} &= -i(\tan\theta_n \sin\gamma_n \sin P_n + \cos\gamma_n \sin Q_n)/Z_n, \\ a_{21} &= i\{(\sin 2\theta_n \sin P_n)/\tau_n^2 - \cos 2\gamma_n \tan\gamma_n \sin Q_n\}, \\ a_{22} &= \cos 2\gamma_n \cos P_n + 2\sin^2\gamma_n \cos Q_n, \\ a_{23} &= -i(\cos\theta_n \sin P_n + \tan\gamma_n \sin\theta_n \sin Q_n)/Y_n, \\ a_{24} &= a_{13}, \\ a_{31} &= 2Z_n \sin\gamma_n \cos 2\gamma_n (\cos Q_n - \cos P_n), \\ a_{32} &= -iZ_n\{(\tau_n \cos^2 2\gamma_n \sin P_n)/\cos\theta_n \\ &\quad + 2\sin 2\gamma_n \sin\gamma_n \sin Q_n\}, \\ a_{33} &= a_{22}, \\ a_{34} &= a_{12}, \\ a_{41} &= -iZ_n\{(4\cos\theta_n \sin^2\gamma_n \sin P_n)/\tau_n \end{aligned} \quad (2.2.44a)$$

$$\begin{aligned}
& + (\cos^2 2\gamma_n \sin Q_n) / \cos \gamma_n, \\
a_{42} &= a_{31}, \\
a_{43} &= a_{21}, \\
a_{44} &= a_{11}.
\end{aligned}$$

ここに,

$$\begin{aligned}
Y_n &= \rho_n C_{Ln}, \quad Z_n = \rho_n C_{Tn}, \quad \tau_n = C_{Ln} / C_{Tn} = \sqrt{2(1-\nu_n)/(1-2\nu_n)}, \\
P_n &= \omega d_n \cos \theta_n / C_{Ln}, \quad Q_n = \omega d_n \cos \gamma_n / C_{Tn}
\end{aligned} \tag{2.2.44b}$$

であり,  $\rho_n$ ,  $\nu_n$  は, それぞれ第  $n$  層の密度およびポアソン比である.

式(2.2.44)において, 任意層  $m$  の  $\theta_m$  と  $\gamma_m$  は多層問題の Snell の法則により,

$$\begin{aligned}
\sin \theta_{n+1} / C_{Ln+1} &= \sin \gamma_{n+1} / C_{Tn+1} \\
&= \sin \theta_m / C_{Lm} = \sin \gamma_m / C_{Tm} \tag{2.2.45}
\end{aligned}$$

の関係がある.

式(2.2.45)から, たとえば第  $m$  層において

$$\sin \theta_m = (C_{Lm} / C_{Ln+1}) \sin \theta_{n+1} \geq 1 \tag{2.2.46a}$$

となる様な場合には, 式(2.2.9)と同様に

$$\cos \theta_m = i \sqrt{(\sin^2 \theta_m - 1)} = i \sqrt{\{(C_{Lm} \sin \theta_{n+1} / C_{Ln+1})^2 - 1\}} \tag{2.2.46b}$$

とすれば良い.

図-2.2.4 における各境界面では, それを挟む両層の連続条件と釣合条件

$$v_{xm} = v_{xm+1}, \quad v_{zm} = v_{zm+1}, \tag{2.2.47a}$$

$$\sigma_{zm} = \sigma_{zm+1}, \quad \tau_{xzm} = \tau_{xzm+1} \tag{2.2.47b}$$

を考慮し, 式(2.2.43)を各境界毎に繰り返し用いると, 境界(1)と境界( $n$ )のこれらの成分の関係は, 式(2.2.43)の左辺の成分を  $\{f^{(n)}\}$  と書き, 式(2.2.43)で与えられる第  $m$  層の伝達行列を  $[a]_m$  と書くと, 以下となる.

$$\{f^{(n)}\} = [a]_n [a]_{n-1} \cdots [a]_3 [a]_2 \{f^{(1)}\} \tag{2.2.48a}$$

$$= [A] \{f^{(1)}\}. \tag{2.2.48b}$$

ここに,  $[A]$  は多層領域の両端の境界値 (粒子速度成分と応力成分) に対する伝達行列で, その要素  $A_{jk}$  ( $j, k = 1 \sim 4$ ) は一般には複素数ではあるが, 層の数に無関係に 4 行 4 列であり, 一般的な場合に対して極めて簡単な演算のみで解析できる.

式(2.2.48)は境界(1)から境界( $n$ )までの多層領域の関係であり, このままでも  $1 \leq h < n$  の  $\{f^{(h)}\}$  が与えられると,  $h < m \leq n$  に対する  $\{f^{(m)}\}$  は, 式(2.2.48)から直ちに求められる. また  $\{f^{(h)}\}$  がたとえば地震基盤と考えた第  $n+1$  層からの入射波の条件で与えられるときは, 境界(1)に適当な境界条件を与えることにより解析できる.

## 2) 境界条件1 (放射条件)

図-2.2.4 において, 境界(1)から( $n$ )までの全層厚を  $H$  とする. このとき第  $n+1$  層

と第1層内の粒子速度と応力の各成分は、境界(1)をx軸としてそれぞれ

$$f_{n+1} = f_{n+1}(\Phi_{n+1}', \Phi_{n+1}'', \Psi_{n+1}', \Psi_{n+1}'', z-H), \quad \dots\dots\dots (2.2.49a)$$

$$f_1 = f_1(\Phi_1', \Phi_1'', \Psi_1', \Psi_1'', -z) \quad \dots\dots\dots (2.2.49b)$$

と書ける。

ここに、 $f_{n+1}$ 、 $f_1$ は添え字の層内の各成分を代表し、これに含まれる層定数は対応する層の添え字を持つものとする。

したがって、境界(n)と境界(1)での各成分は式(2.2.49)から

$$\{f^{(n)}\} = f_{n+1}(z=H), \quad \dots\dots\dots (2.2.50a)$$

$$\{f^{(1)}\} = f_1(-z=0) \quad \dots\dots\dots (2.2.50b)$$

によって得られる。

式(2.2.50)の $\{f^{(n)}\}$ と $\{f^{(1)}\}$ には、式(2.2.49)から明らかなように各4個、合計8個の未知ポテンシャル振幅が含まれている。

いま、境界(n)を入射波が与えられる境界とし、第n+1層はz軸の正方向に無限の広がりを持つ、すなわち放射条件を満足するとすれば、入射波の種類すなわち縦波または横波に対応して、 $\{f^{(n)}\}$ の $\Phi_{n+1}''$ または $\Psi_{n+1}''$ は0である。

一方、第1層がz軸の負方向に対して放射条件を満足する場合には、 $\Phi_1' = \Psi_1' = 0$ である。したがって、この場合は式(2.2.50)に含まれる未知ポテンシャル振幅は高々5個であり、式(2.2.49)の $f_{n+1}$ および $f_1$ に式(2.2.50)を代入し、未知ポテンシャル振幅に対する連立方程式を構成すると、入射波の種類に対応して他の未知ポテンシャル振幅が求められる。

式(2.2.50)の具体的な形は、 $z=H$ が境界(n)については $z_{n+1}=0$ を意味するから、共通因子 $\exp i(\delta x - \omega t)$ を省略し、パラメータ間の関係を考慮すると以下となる。

$$v_x^{(n)} = i\omega\{(\Phi_{n+1}' + \Phi_{n+1}'')\sin\gamma_{n+1} - (\Psi_{n+1}' - \Psi_{n+1}'')\cos\gamma_{n+1}\}/C_{Tn+1}, \quad \dots\dots\dots (2.2.51a)$$

$$v_z^{(n)} = i\omega\{(\Phi_{n+1}' - \Phi_{n+1}'')\cos\gamma_{n+1} + (\Psi_{n+1}' + \Psi_{n+1}'')\sin\gamma_{n+1}\}/C_{Ln+1}, \quad \dots\dots\dots (2.2.51b)$$

$$\sigma_z^{(n)} = -i\rho_{n+1}\omega\{(\Phi_{n+1}' + \Phi_{n+1}'')\cos 2\gamma_{n+1} + (\Psi_{n+1}' - \Psi_{n+1}'')\sin 2\gamma_{n+1}\}, \quad \dots\dots\dots (2.2.51c)$$

$$\tau_{xz}^{(n)} = -i\rho_{n+1}\omega\{(1/\tau_{n+1})^2(\Phi_{n+1}' - \Phi_{n+1}'')\sin 2\gamma_{n+1} - (\Psi_{n+1}' + \Psi_{n+1}'')\cos 2\gamma_{n+1}\} \quad \dots\dots\dots (2.2.51d)$$

および

$$v_x^{(1)} = i\omega(\Phi_1''\sin\gamma_1 + \Psi_1''\cos\gamma_1)/C_{T1}, \quad \dots\dots\dots (2.2.52a)$$

$$v_z^{(1)} = -i\omega(\Phi_1''\cos\gamma_1 - \Psi_1''\sin\gamma_1)/C_{L1}, \quad \dots\dots\dots (2.2.52b)$$

$$\sigma_z^{(1)} = -i\rho_1\omega(\Phi_1''\cos 2\gamma_1 - \Psi_1''\sin 2\gamma_1), \quad \dots\dots\dots (2.2.52c)$$

$$\tau_{xz}^{(1)} = i\rho_1\omega\{(1/\tau_1)^2\Phi_1''\sin 2\gamma_1 + \Psi_1''\cos 2\gamma_1\}. \quad \dots\dots\dots (2.2.52d)$$

式(2.2.51)、(2.2.52)を式(2.2.48)へ代入すると、以下の連立方程式が得られる。

$$\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & B_{24} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & B_{34} \\ B_{41} & B_{42} & B_{43} & B_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_{n+1}' \\ \Psi_{n+1}' \\ \Phi_1'' \\ \Psi_1'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \\ C_{31} & C_{32} \\ C_{41} & C_{42} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_{n+1}'' \\ \Psi_{n+1}'' \end{pmatrix}. \quad \dots\dots\dots (2.2.53a)$$

ここに、左辺の行列の要素  $B_{jk}$  ( $j, k=1\sim 4$ ) は以下である。

$$\left. \begin{aligned} B_{11} &= -\sin \gamma_{n+1} / C_{Tn+1}, & B_{12} &= \cos \gamma_{n+1} / C_{Tn+1}, \\ B_{21} &= -\cos \theta_{n+1} / C_{Tn+1}, & B_{22} &= B_{11}, \\ B_{31} &= \rho_{n+1} \cos 2\gamma_{n+1}, & B_{32} &= \rho_{n+1} \sin 2\gamma_{n+1}, \\ B_{41} &= \rho_{n+1} \sin 2\theta_{n+1} / \tau_{n+1}^2, & B_{42} &= -B_{31}, \\ B_{j3} &= (A_{j1} \sin \theta_1 - A_{j2} \cos \theta_1) / C_{L1} \\ &\quad - \rho_1 (A_{j3} \cos 2\gamma_1 - A_{j4} \sin 2\theta_1 / \tau_1^2), \\ B_{j4} &= (A_{j1} \cos \gamma_1 + A_{j2} \sin \gamma_1) / C_{T1} \\ &\quad + \rho_1 (A_{j3} \sin 2\gamma_1 + A_{j4} \cos 2\theta_1). \end{aligned} \right\} \quad (2.2.53b)$$

また、右辺の行列の要素  $C_{jm}$  ( $m=1, 2$ ) は以下である。

$$\left. \begin{aligned} C_{11} &= -B_{11}, & C_{21} &= B_{21}, & C_{31} &= -B_{31}, & C_{41} &= B_{41}, \\ C_{12} &= B_{12}, & C_{22} &= -B_{11}, & C_{32} &= B_{32}, & C_{42} &= -B_{42} \end{aligned} \right\} \quad (2.2.53c)$$

式(2.2.53)は縦波入射 ( $\Phi_{n+1}''$ のみ)、横波入射 ( $\Psi_{n+1}''$ のみ) の何れの場合に対しても適用できるように示してある。

結局、与えられた問題に対して式(2.2.53a) から未知ポテンシャル振幅を求め、式(2.2.51)と(2.2.52)から  $\{f^{(n)}\}$  と  $\{f^{(1)}\}$  が定まると、式(2.2.43)を用いて順次  $\{f^{(2)}\}$ ,  $\{f^{(3)}\}$ ,  $\dots\dots\dots$ ,  $\{f^{(n-1)}\}$  を求めることができる。さらに、図-2.2.4 の第  $m$  層内の任意の位置についても、式(2.2.10)を用いるかまたは境界  $(m-1)$  から、 $d_m' (< d_m)$  を適当に定めた仮想の境界  $(m')$  を考えることにより、 $\{f^{(m')}\}$  を求めることができる。

### 3) 境界条件 2 (自由境界)

前項 2) では無限領域内の多層境界を考え、両端境界で放射条件が満足される場合を対象にした。ここでは耐震工学上重要な、地表を含む多層地盤問題に適用できるように、入射条件は 2) と同じであるとして、境界(1)が自由境界である場合について検討する。

境界(1)に自由境界の条件を満足させるには 2 つの方法がある。

第 1 は前項の放射条件を仮定して導かれた関係において、第 1 層の物理定数を他の層のそれに比較して十分小さい値 (たとえば空気程度) を選ぶことである。この場合境界(1)の応力成分は厳密には 0 とならないが、解析のどの段階においても新しい操作を必要とせず一般性が保たれる。

第 2 は境界(1)に直接自由境界の条件を与える方法で、以下の操作により、2) で用いた関係式を若干変更するだけで導ける。

境界(1)が自由境界である条件は、式(2.2.43)において  $n=2$  のとき、

$$\sigma_z^{(1)} = \tau_{xz}^{(1)} = 0 \quad \dots\dots\dots (2.2.54)$$

であるから、式(2.2.43)および式(2.2.48)は以下となる。

$$\{f^{(2)}\} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x^{(1)} \\ v_z^{(1)} \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (2.2.55)$$

および

$$\{f^{(n)}\} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \\ A_{31} & A_{32} \\ A_{41} & A_{42} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x^{(1)} \\ v_z^{(1)} \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (2.2.56)$$

ここに、式(2.2.55)の右辺の係数行列の要素  $a_{jm}$  ( $j=1\sim 4$ ,  $m=1, 2$ ) は、第2層のパラメータを持つものとする。

したがって、自由表面で調和波の粒子速度成分  $v_x^{(1)}$ ,  $v_z^{(1)}$  が与えられると、境界 ( $m$ ) の各成分  $\{f^{(m)}\}$  は式(2.2.48)から容易に求められる。

式(2.2.49b) は

$$f_2 = f_2(\Phi_2', \Phi_2'', \Psi_2', \Psi_2'', z) \quad \dots\dots\dots (2.2.57)$$

と書けるから

$$\{f^{(1)}\} = f_2(z=0) \quad \dots\dots\dots (2.2.58)$$

として境界(1)の値が得られる。

$\{f^{(1)}\}$  に含まれる成分のうち、式(2.2.54)により応力成分2個は既知であるから、式(2.2.58)の未知ポテンシャル振幅は2個となり、残りの粒子速度成分の具体的な形は以下となる。

$$v_x^{(1)} = -i\omega M(\Psi_2' - \Psi_2''), \quad \dots\dots\dots (2.2.59a)$$

$$v_z^{(1)} = i\omega N(\Psi_2' + \Psi_2''). \quad \dots\dots\dots (2.2.59b)$$

ここに、

$$M = (\cos \gamma_2 + \sin \gamma_2 \tan 2\gamma_2) / C_{T2}, \quad \dots\dots\dots (2.2.60a)$$

$$N = \{\sin \theta_2 + (C_{L2} \cos 2\gamma_2 / 2C_{T2} \sin \gamma_2)\} / C_{L2} \quad \dots\dots\dots (2.2.60b)$$

である。

式(2.2.59)を式(2.2.56)に代入すると、式(2.2.53a) に対応する以下の連立方程式が得られる。

$$\begin{bmatrix} B_{11}' & B_{12}' & B_{13}' & B_{14}' \\ B_{21}' & B_{22}' & B_{23}' & B_{24}' \\ B_{31}' & B_{32}' & B_{33}' & B_{34}' \\ B_{41}' & B_{42}' & B_{43}' & B_{44}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_{n+1}' \\ \Psi_{n+1}' \\ \Psi_2' - \Psi_2'' \\ \Psi_2' + \Psi_2'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \\ C_{31} & C_{32} \\ C_{41} & C_{42} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_{n+1}'' \\ \Psi_{n+1}'' \end{bmatrix}.$$

$$\dots\dots\dots(2.2.61a)$$

ここに、左辺の係数行列の要素 $B_{jk}'$ は、式(2.2.48)と式(2.2.53b,c)を参照して

$$B_{jm}' = B_{jm}, B_{j3}' = -MA_{j1}, B_{j4}' = NA_{j2} \quad \dots\dots\dots(2.2.61b)$$

である。ただし、 $j=1\sim 4, m=1, 2$ である。

#### 4) 滑動境界条件

ここでは、多層境界の任意の一つの境界に滑動を許すような場合に対する取扱を検討する。このような状態は実地盤においては、たとえば極めて薄い破碎帯か軟弱な層が比較的剛な層に挟まれている場合に対応するであろう。したがって、前述の解析法においてその層定数をそのまま用いるか、層厚を十分薄くしかもせん断弾性係数を十分小さく仮定した層を用いればよいが、一般にその層定数の評価が困難であることが多い。そのため、薄い軟弱層そのものを一つの滑動境界とするモデルを採用する方が便利であることが考えられる。

いま、図-2.2.4において境界(m)が滑動境界であるとし、第 $m+1$ 層および第 $m$ 層側から考えた境界(m)をそれぞれ境界(m<sup>+</sup>)、境界(m<sup>-</sup>)とする。このとき、式(2.2.48)は境界(m)で分けて

$$\{f^{(n)}\} = [A^+]\{f^{(m+)}\}, \quad \dots\dots\dots(2.2.62a)$$

$$\{f^{(m-)}\} = [A^-]\{f^{(1)}\} \quad \dots\dots\dots(2.2.62b)$$

と書ける。

ここに、

$$[A^+] = [a]_n [a]_{n-1} \dots\dots [a]_{m+1}, \quad \dots\dots\dots(2.2.62c)$$

$$[A^-] = [a]_m [a]_{m-1} \dots\dots [a]_2 \quad \dots\dots\dots(2.2.62d)$$

である。

滑動境界の条件は式(2.2.62)において、

$$v_z^{(m+)} = v_z^{(m-)}, \quad \dots\dots\dots(2.2.63a)$$

$$\sigma_z^{(m+)} = \sigma_z^{(m-)}, \quad \dots\dots\dots(2.2.63b)$$

$$\tau_{xz}^{(m+)} = \tau_{xz}^{(m-)} = 0 \quad \dots\dots\dots(2.2.63c)$$

である。

式(2.2.62b)において境界(1)を自由境界とすると、 $\sigma_z^{(1)} = \tau_{xz}^{(1)} = 0$ であるから、 $[A^-]$ はその第3, 4列を省いたものとなる。一方、 $\tau_{xz}^{(m-)} = 0$ であるから $[A^-]$ の要素 $A_{jm}^-$  ( $j=1\sim 4, m=1, 2$ )を用いると、

$$v_x^{(1)} = -(A_{42}^-/A_{41}^-)v_z^{(1)}$$

となる。

したがって、 $\{f^{(m-)}\}$ の各成分は以下のように書ける。

$$v_x^{(m-)} = R_{11}v_z^{(1)}, \quad \dots\dots\dots(2.2.64a)$$

$$v_z^{(m-)} = R_{21}v_z^{(1)}, \quad \dots\dots\dots(2.2.64b)$$

$$\sigma_z^{(m-)} = R_{31} v_z^{(1)}, \quad \dots\dots\dots (2.2.64c)$$

$$\tau_{xz}^{(m-)} = 0. \quad \dots\dots\dots (2.2.64d)$$

ここに,

$$R_{j1} = -(A_{j1}^- A_{42}^- / A_{41}^-) + A_{j2}^-, \quad (j=1, 2, 3) \quad \dots\dots\dots (2.2.64e)$$

である。

次に、式(2.2.62a)において $\tau_{xz}^{(m+)} = 0$ であるから、 $[A^+]$ はその第4列を省いたものとなる。 $\{f^{(m+)}\}$ と $\{f^{(m-)}\}$ に含まれる成分間の関係から、式(2.2.64b,c)を式(2.2.62a)の右辺に代入し、 $\{f^{(n)}\}$ をポテンシャル振幅で表すと、以下の連立方程式が得られる。

$$\begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} & L_{14} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} & L_{24} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & L_{34} \\ L_{41} & L_{42} & L_{43} & L_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_{n+1}' \\ \Psi_{n+1}' \\ v_z^{(m+)} \\ v_z^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \\ C_{31} & C_{32} \\ C_{41} & C_{42} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_{n+1}'' \\ \Psi_{n+1}'' \end{pmatrix}. \quad \dots\dots\dots (2.2.65a)$$

ここに、左辺の係数行列の要素 $L_{jk}$ は、式(2.2.53b)、式(2.2.62c,d)、式(2.2.64e)を参照すると、 $j=1\sim 4$ 、 $m=1, 2$ として

$$\left. \begin{aligned} L_{jm} &= B_{jm}, \quad L_{j3} = -i A_{j1}^+ / \omega, \\ L_{j4} &= -i (R_{21} A_{j2}^+ + R_{31} A_{j3}^+) / \omega \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (2.2.65b)$$

である。

式(2.2.65)が解かれると式(2.2.62)と式(2.2.64)を用いて、境界(m)が滑動境界である場合の任意境界の各成分を求めることができる。

以上、2. 2. 2. においては、いくらか表現が煩雑になるにもかかわらず、敢えて演算に必要なパラメータを、層定数については現場測定で比較的得られ易いものとして、各層の層厚 $d$ 、密度 $\rho$ 、縦波速度 $C_L$ 、横波速度 $C_T$ のみとし、入射波の条件は円振動数 $\omega$ 、横波入射角 $\gamma_{n+1}$ または縦波入射角 $\theta_{n+1}$ のみで示した。各層境界への入射角、反射角は複素数になるかどうかの判定を含めて、これらから直ちに求め得る。

## 2. 2. 3. 平行多層弾性体の調和SH波

### 1) SH波の伝達行列

ここでは、2. 2. 2. で行ったのと同様の過程で、SH波に対する伝達行列を導く。

まず、第 $n$ 層の粒子速度とせん断応力を、式(2.2.31a,c)から再掲すると、

$$v_{yn} = \{D_n' \exp(i \beta_n z) + D_n'' \exp(-i \beta_n z)\} \exp i(\delta x - \omega t), \quad \dots\dots\dots (2.2.66a)$$

$$\tau_{yzn} = -(1/\omega) \mu_n \beta_n \{D_n' \exp(i \beta_n z) - D_n'' \exp(-i \beta_n z)\} \exp i(\delta x - \omega t) \quad \dots\dots\dots (2.2.66b)$$



である。

ここで  $z = d_n$  として、第  $n$  層のパラメータを用いて境界 ( $n$ ) の粒子速度とせん断応力を表し、 $v_y = v$ 、 $\tau_{yz} = \tau$  と書くことにすると

$$v^{(n)} = \{D_n'(\cos Q_n + i \sin Q_n) + D_n''(\cos Q_n - i \sin Q_n)\} \exp i(\delta x - \omega t), \quad \dots\dots\dots (2.2.67a)$$

$$\tau^{(n)} = -(\mu_n \beta_n / \omega) \{D_n'(\cos Q_n + i \sin Q_n) - D_n''(\cos Q_n - i \sin Q_n)\} \exp i(\delta x - \omega t) \quad \dots\dots\dots (2.2.67b)$$

と表せる。

ここに、 $Q_n = \beta_n d_n = \kappa_n d_n \cos \gamma_n$  である。

一方、境界 ( $n-1$ ) のこれらの値は  $z = 0$  として得られるから、境界 ( $n$ ) と境界 ( $n-1$ ) についての伝達行列は、式 (2.2.33) の連続条件と釣合条件を用いて、 $D_n'$ 、 $D_n''$  を消去し、 $\exp i(\delta x - \omega t)$  を省いて表すと

$$\begin{bmatrix} v^{(n)} \\ \tau^{(n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos Q_n & -i \sin Q_n / Z_n \cos \gamma_n \\ i Z_n \cos \gamma_n \sin Q_n & \cos Q_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^{(n-1)} \\ \tau^{(n-1)} \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (2.2.68)$$

となる。ここに、 $Z_n = \rho_n C_{Tn}$  である。

式 (2.2.68) を代表表現を用いて

$$\{g^{(n)}\} = [h]_n \{g^{(n-1)}\} \quad \dots\dots\dots (2.2.69)$$

と書くと、垂直入射 ( $\gamma_{n+1} = 0$ ) のとき右辺の係数行列の要素は、P 波、SV 波の場合の式 (2.2.44) と比較して

$$h_{11} = a_{11}, \quad h_{12} = a_{14}, \quad h_{21} = a_{41}, \quad h_{22} = a_{44} \quad \dots\dots\dots (2.2.70)$$

となっている。

境界 (1) と境界 ( $n$ ) の関係は、式 (2.2.48) と同様に、式 (2.2.69) を繰り返し用いて以下のように書ける。

$$\{g^{(n)}\} = [h]_n [h]_{n-1} \dots\dots\dots [h]_3 [h]_2 \{g^{(1)}\} \quad \dots\dots\dots (2.2.71a)$$

$$= [H] \{g^{(1)}\}. \quad \dots\dots\dots (2.2.71b)$$

また、 $[h]_m$  の要素に現れる  $\gamma_m$  は Snell の法則

$$\sin \gamma_m / C_{Tm} = \sin \gamma_{n+1} / C_{Tn+1} \quad \dots\dots\dots (2.2.72)$$

から求められる。ただし、 $\gamma_{n+1}$  がたとえば境界 ( $m$ ) に対して臨界角を越えた場合には、式 (2.2.46) と同様の処理をする。

式 (2.2.71) に適当な境界条件を与えると、任意境界の粒子速度とせん断応力が求まる。

## 2) 一端が自由境界である場合

上述したように、式 (2.2.71) に実際的な境界条件、たとえば、2. 2. 2. 2), 3) で述べた様な境界条件を与えれば、任意境界の粒子速度とせん断応力を得ることができる。そこで、ここでも実地盤に適用し易いように、境界 (1) が自由境界で、入射 SH 波が放射

条件を満たす第  $n+1$  層から入射する場合を考える。

自由境界(1)の境界条件は  $z=0$  で  $\tau^{(1)}=0$  であるから、式(2.2.67b) より

$$D_2' = D_2'', \quad \dots\dots\dots (2.2.73a)$$

また,

$$v^{(1)} = 2D_2'' \exp i(\delta x - \omega t) \quad \dots\dots\dots (2.2.73b)$$

となる。

したがって、式(2.2.71)は

$$\{v^{(n)} \quad \tau^{(n)}\}^T = [H] \{v^{(1)} \quad \tau^{(1)}\}^T = 2D_2'' \{H_{11} \quad H_{21}\}^T \quad (2.2.74)$$

と書ける。

ここに、 $H_{11}$ ,  $H_{21}$  は  $[H]$  の要素である。

いま、入射条件として  $D_{n+1}''$  が与えられると、未知振幅は  $D_2''$  と  $D_{n+1}'$  だけになり、これらは式(2.2.66)の型の  $v_{n+1}$ ,  $\tau_{n+1}$  において  $z=0$  として得られる

$$v^{(n)} = (D_{n+1}' + D_{n+1}'') \exp i(\delta x - \omega t), \quad \dots\dots\dots (2.2.75a)$$

$$\tau^{(n)} = -Z_{n+1} \cos \gamma_{n+1} (D_{n+1}' - D_{n+1}'') \exp i(\delta x - \omega t) \quad (2.2.75b)$$

を、 $\exp i(\delta x - \omega t)$  を省いて式(2.2.74)に代入すると、以下のように求められる。

$$D_2''/D_{n+1}'' = 1/\{H_{11} + (H_{21}/Z_{n+1} \cos \gamma_{n+1})\}, \quad \dots\dots\dots (2.2.76a)$$

$$D_{n+1}'/D_{n+1}'' = \{H_{11} - (H_{21}/Z_{n+1} \cos \gamma_{n+1})\}/\{H_{11} + (H_{21}/Z_{n+1} \cos \gamma_{n+1})\}. \quad \dots\dots\dots (2.2.76b)$$

ここで、式(2.2.68)から明らかなように  $H_{21}$  が必ず純虚数であることを考慮すると、式(2.2.76)は

$$D_2''/D_{n+1}'' = (1/|q_1|) \exp(-i\varphi_1), \quad \dots\dots\dots (2.2.77a)$$

$$D_{n+1}'/D_{n+1}'' = \exp(-2i\varphi_1) \quad \dots\dots\dots (2.2.77b)$$

となる。

ここに,

$$q_1 = H_{11} + (H_{21}/Z_{n+1} \cos \gamma_{n+1}), \quad \dots\dots\dots (2.2.77c)$$

$$\varphi_1 = \arg(q_1) \quad \dots\dots\dots (2.2.77d)$$

である。

式(2.2.77)を式(2.2.74)に代入すると、任意境界の粒子速度とせん断応力が容易に求められる。

### 3) 自由境界を持つ2層問題

ここでは図-2.2.5 に示すように、多層問題の中でも最も簡単な、自由境界を含む層厚  $d_2$  の表層(第2層)と、いわゆる基盤(第3層)とで構成される2層問題を取り上げ、単位の振幅( $D_3''=1$ )を持つSH波が、基盤へ任意角度で入射する場合について考察する。

いまの場合  $n=2$  であるから伝達行列は  $[h]_2$  のみが関係し、その要素を  $h_{jk}$  とすると式(2.2.68)から

$$H_{11} = h_{11} = \cos Q_2, \quad \dots\dots\dots (2.2.78a)$$

$$H_{21} = h_{21} = i Z_2 \cos \gamma_2 \sin Q_2 \quad \dots\dots\dots (2.2.78b)$$

である。

式(2.2.66)は式(2.2.73a) を考慮し、式(2.2.76)と式(2.2.78)を用いると、

$$\begin{aligned} v_2 &= D_2'' \{ \exp(i \beta_2 z_2) + \exp(-i \beta_2 z_2) \} \exp i (\delta x - \omega t) \\ &= 2D_2'' \cos(\beta_2 z_2) \exp i (\delta x - \omega t) \\ &= (2/|q_2|) \cos(\beta_2 z_2) \exp i (\delta x - \omega t - \phi_2), \quad \dots\dots\dots (2.2.79a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_3 &= \{ \exp(-i \beta_3 z_3) + D_3' \exp(i \beta_3 z_3) \} \exp i (\delta x - \omega t) \\ &= \{ \exp(-i \beta_3 z_3) + \exp(i \beta_3 z_3 - 2\phi_2) \} \exp i (\delta x - \omega t) \\ &= 2 \cos(\beta_3 z_3 - \phi_2) \exp i (\delta x - \omega t - \phi_2) \quad \dots\dots\dots (2.2.79b) \end{aligned}$$

となる。

ここに、

$$\begin{aligned} q_2 &= \cos Q_2 + i (Z_2 \cos \gamma_2 \sin Q_2 / Z_3 \cos \gamma_3) \\ &= \cos Q_2 \{ 1 + i (Z_2 \cos \gamma_2 / Z_3 \cos \gamma_3) \tan Q_2 \}, \quad \dots\dots\dots (2.2.79c) \end{aligned}$$

$$\phi_2 = \arg(q_2) \quad \dots\dots\dots (2.2.79d)$$

である。

また、自由境界の粒子速度の振動数応答関数を  $\eta(i\omega)$  とすると、式(2.2.79a) から

$$\eta(i\omega) = 2/(\cos Q_2 + i \sigma_{23} \sin Q_2) \quad \dots\dots\dots (2.2.80a)$$

と表せる。ここに、

$$\sigma_{23} = Z_2 \cos \gamma_2 / Z_3 \cos \gamma_3 \quad \dots\dots\dots (2.2.80b)$$

であり、 $\sigma_{23}$  は任意角度で入射する場合の一般化された特性抵抗比と考えられる。

(1)  $\gamma_3 \leq \gamma_c$  のとき：

式(2.2.79)の右辺の  $\beta_2$ ,  $\gamma_2$ ,  $Q_2$  は実数であるから、そのまま以下のように表される。

$$v_2 = (2/|q_2|) \cos(\beta_2 z_2) \exp i (\delta x - \omega t - \phi_2), \quad \dots\dots\dots (2.2.81a)$$

$$v_3 = 2 \cos(\beta_3 z_3 - \phi_2) \exp i (\delta x - \omega t - \phi_2). \quad \dots\dots\dots (2.2.81b)$$

式(2.2.81)は、第2層内では重複反射するSH波が、第3層内では入射波と反射波が重なり合って定常状態になり、 $z$  方向に伝播する因子を持たない。この状態は等しい振幅を連ねた波面の方向は  $z$  軸を向き、波動の伝播方向は  $x$  軸を向いていることを意味するから、2. 1. 5. 3) で述べた非均質波である。しかし、この場合式(2.2.81a) は、境界から離れるに従って振幅が減少することを示していないため境界波ではない。

また、振動数応答関数は

$$\begin{aligned} \eta(i\omega) &= 2/(\cos Q_2 + i \sigma_{23} \sin Q_2) \\ &= 2 \exp(-i \phi_2) / \sqrt{1 + (\sigma_{23}^2 - 1) \sin^2 Q_2} \\ &= H \exp(-i \phi_2) \quad \dots\dots\dots (2.2.82a) \end{aligned}$$

と書ける。ここに、

$$H = 2/\sqrt{1 + (\sigma_{23}^2 - 1) \sin^2 Q_2} \quad \dots\dots\dots (2.2.82b)$$

Ch2.Sc2

である。

①  $\sigma_{23} < 1$  のとき:  $\sin^2 Q_2 = 1$ , すなわち  $m$  を自然数として,  $Q_2 = (2m-1)\pi/2$  または,  $\omega = (2m-1)\pi C_{T2}/2d_2 \cos \gamma_2$  であれば,  $H_{\max} = 2/\sigma_{23}$ ,  $\phi_2 = -(2m-1)\pi/2$  となる。したがって,  $2 \leq |\eta(i\omega)| \leq 2/\sigma_{23}$ 。

$C_{T2}/C_{T3} > 1$  のとき, 常に  $\cos \gamma_2 / \cos \gamma_3 < 1$  であり,  $Z_2/Z_3 > 1$  (表層が堅い) の場合でも  $\sigma_{23} < 1$  となり得る。したがって,  $Z_2/Z_3 > 1$  では垂直入射時に  $H_{\max} \leq 2$  であるにもかかわらず, ②で示すような  $\gamma_3' < \gamma_3 < \gamma_c$  の入射角に対しては  $\sigma_{23} < 1$  となり,  $H_{\max} \geq 2$  の応答を生じる。

②  $\sigma_{23} = 1$  のとき:  $\sigma_{23} = 1$  となる入射角を  $\gamma_3'$  とすると,  $p = Z_3/Z_2$  として

$$\sin^2 \gamma_3' = (p^2 - 1) / \{p^2 - (C_{T2}/C_{T3})^2\}$$

である。このときは  $\omega$  に無関係に,  $|\eta(i\omega)| = 2$ ,  $\phi_2 = -Q_2$  である。

③  $\sigma_{23} \geq 1$  のとき:  $\sin^2 Q_2 = 0$ , すなわち  $Q_2 = m\pi$ , または  $\omega = m\pi C_{T2}/d_2 \cos \gamma_2$  であれば,  $H_{\max} = 2$ ,  $\phi_2 = 0$  となる。したがって,  $2/\sigma_{23} \leq |\eta(i\omega)| \leq 2$ 。

(2)  $\gamma_3 \geq \gamma_c$  のとき:

$$\cos \gamma_2 = i \sqrt{(\sin^2 \gamma_2 - 1)} = i |\cos \gamma_2| \quad \dots\dots\dots (2.2.83a)$$

となるから,  $b = \omega |\cos \gamma_2| / C_{T2}$  として

$$\beta_2 = \omega \cos \gamma_2 / C_{T2} = i \omega |\cos \gamma_2| / C_{T2} = i b, \quad \dots\dots\dots (2.2.83b)$$

$$Q_2 = \beta_2 d_2 = i d_2 \omega |\cos \gamma_2| / C_{T2} = i b d_2, \quad \dots\dots\dots (2.2.83c)$$

と置くと, これらは純虚数となる。

したがって, 式(2.2.79)は以下のように書ける。

$$v_2 = (2/|q_3|) \cosh(b z_2) \exp i(\delta x - \omega t - \phi_3), \quad \dots\dots\dots (2.2.84a)$$

$$v_3 = 2 \cos(\beta_3 z_3 - \phi_3) \exp i(\delta x - \omega t - \phi_3). \quad \dots\dots\dots (2.2.84b)$$

ここに,

$$q_3 = \cosh(b d_2) \{1 - i Z_2 |\cos \gamma_2| \tanh(b d_2) / Z_3 \cos \gamma_3\}, \quad (2.2.85a)$$

$$\phi_3 = \arg(q_3) \quad \dots\dots\dots (2.2.85b)$$

である。

式(2.2.84a) から  $v_2$  は  $z = d_2$  (境界(2)) で最大振幅

$$D^{(2)}_{\max} = 2 / \{1 - i Z_2 |\cos \gamma_2| \tanh(b d_2) / Z_3 \cos \gamma_3\} \quad \dots\dots (2.2.86a)$$

を持ち, 境界(1)に向かって指数関数的に減少し, 境界(1)での振幅は

$$D^{(1)} = D^{(2)}_{\max} / \cosh(b d_2) \quad \dots\dots\dots (2.2.86b)$$

となるから, 第2層内では境界(2)に関する境界波であることが分かる。また境界(2)で反射したSH波の振幅は入射波の振幅と同じで位相だけ変化し, 第3層内で  $z$  方向に定常応答を示すが境界波ではない。なお, 2. 1. 5. で述べた表面波と同様に, 入射波に無関係にこの場合の第2層(表層)を伝播するSH波に注目すると, 別の形の表面波である Love Wave が得られるが, 本論文の対象でないので詳述しない。

また, 振動数応答関数は式(2.2.80a)において  $Q_2$ ,  $\sigma_{23}$  ともに純虚数となるから, そ

れぞれを  $iQ_2'$ ,  $i\sigma_{23}'$  として,

$$\eta(i\omega) = 2\exp(-i\varphi_3)/h \quad \dots\dots\dots(2.2.87a)$$

と書ける.

ここに,

$$h = \sqrt{\{1 + (1 + \sigma_{23}'^2)\sinh^2 Q_2'\}} \quad \dots\dots\dots(2.2.87b)$$

である.

$\eta(i\omega)$  の極大値は  $h$  の極小値に対応するから,  $\sinh^2 Q_2' = 0$  すなわち  $Q_2' = 0$  のとき  $h = 1$  となり, 極大値は 2 となる.

したがって,  $\eta(i\omega)$  は  $\omega = 0$  で極大値 2 をとり,  $\omega$  の増加と共に減少する.

(1), (2) の状態を下記の二種類の 2 層モデル SH 1, SH 2 に対する計算例で示す.

a) SH 1:  $C_{T2} = 200\text{m/sec}$ ,  $C_{T3} = 500\text{m/sec}$ ,  $\rho_2 = \rho_3$ ,  $d_2 = 50\text{m}$ ,  $Z_2/Z_3 = 2/5$ .

b) SH 2:  $C_{T2} = 300\text{m/sec}$ ,  $C_{T3} = 200\text{m/sec}$ ,  $\rho_2 = \rho_3$ ,  $d_2 = 50\text{m}$ ,  $Z_2/Z_3 = 3/2$ .

図-2.2.6 に, 2 層モデル SH 1 について, 入射角  $\gamma_3$  が  $0^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $80^\circ$  の場合の, 自由境界の振動数応答関数  $\eta(i\omega)$  を示す. 2 層モデル SH 1 は固有周期が 1 sec で,  $f = 4\text{ Hz}$  は  $Q_2 = 2\pi$  に相当し臨界角は存在しない. 振動数応答関数の最大値  $H_{\text{MAX}}$  は垂直入射時で,  $2/\sigma_{23} = 5$  となっている. 入射角が増加するにつれて最大値は減少する.

②で述べた  $\sigma_{23} = 1$  は入射角  $\gamma_3 = 68.2^\circ$  のときである. したがって,  $\gamma_3 = 80^\circ$  では③の場合に相当する.  $\gamma_3 = 80^\circ$  のとき表層への透過角は  $\gamma_2 = 23.2^\circ$  であり, 表層内の経路が層厚より増加するため, 垂直入射時に比較して明らかに位相がずれている.

図-2.2.7 (a) に, 2 層モデル SH 2 について, 入射角が  $\gamma_3 = 0^\circ$ ,  $33.7^\circ$ ,  $41^\circ$ ,  $42^\circ$  の場合の, 自由境界の振動数応答関数  $\eta(i\omega)$  を示す. この 2 層モデルは表層の特性抵抗の方が基盤のそれより大きく臨界角が存在し, 臨界角は  $\gamma_c = 41.8^\circ$  である. また, ②で述べた  $\gamma_3' = 33.7^\circ$  である. したがって, (1) および (2) で述べた全ての状態が現れる.

②で述べた  $\gamma_3' = 33.7^\circ$  で振動数に無関係に最大値は 2 となり, ①で述べたように臨界角に達する直前の  $\gamma_3 = 41^\circ$  では最大値が 5.5 に増加し, (2) で示したように臨界角を越えた  $\gamma_3 = 42^\circ$  では振動数  $f = 0\text{ Hz}$  で最大値 2 となり, 振動数の増加と共に指数関数的に減少する.

図-2.2.7 (b) に, 各入射角における最大応答  $H_{\text{MAX}}$  の垂直入射時の最大応答  $H_{0\text{MAX}}$  に対する比を, 最大応答比  $\eta^* = H_{\text{MAX}}/H_{0\text{MAX}}$  として示す. 臨界角付近で極めて大きな応答を生じることが分かる.

#### 4) 自由境界をもつ多層体へ垂直入射する場合

いま, 基盤面を境界 (n), 自由境界を境界 (1) とする平行多層体に対して, 放射条件を満足する第  $n + 1$  層から S 波が垂直入射する場合を考える. この設定は耐震工学において

自由境界を地表とする多層地盤の、固有振動数と振動数応答関数などを推定する場合の基礎となる重要な対象である。

この場合の基礎式は、式(2.2.70)で示した関係があるため、SV波またはSH波のどちらのものを用いても同じであるが、ここではSH波に対する式(2.2.71)を用いる。

入射SH波の粒子速度の振幅に対する自由境界の振幅比、すなわち地表の振動数応答関数を $\eta(i\omega)$ とし、位相変化を $\phi$ とすると、式(2.2.76a)からこれらは以下のように表せる。

$$|\eta(i\omega)| = |v^{(1)}/D_{n+1}| = 2/|H_{11} + (H_{21}/Z_{n+1})|, \quad \dots\dots\dots (2.2.88a)$$

$$\phi = -\arg\{H_{11} + (H_{21}/Z_{n+1})\}. \quad \dots\dots\dots (2.2.88b)$$

なお式(2.2.75)に対して述べたように、 $H_{11}$ は実数であるが $H_{21}$ は常に純虚数である。

簡単に計算できるように、以下に境界数が $n=2\sim 4$ までの場合について、 $H_{11}$ 、 $H_{21}$ を示す。

$n=2$  :

$$\left. \begin{aligned} H_{11} &= \cos Q_2, \\ H_{21} &= -i Z_2 \sin Q_2. \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (2.2.89a)$$

$n=3$  :

$$\left. \begin{aligned} H_{11} &= \cos Q_2 \cos Q_3 - (Z_{23}) \sin Q_2 \sin Q_3, \\ H_{21} &= -i Z_3 \{ \cos Q_2 \sin Q_3 + (Z_{23}) \sin Q_2 \cos Q_3 \}. \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (2.2.89b)$$

$n=4$  :

$$\left. \begin{aligned} H_{11} &= \cos Q_2 \cos Q_3 \cos Q_4 - (Z_{23}) \sin Q_2 \sin Q_3 \cos Q_4 \\ &\quad - (Z_{34}) \cos Q_2 \sin Q_3 \sin Q_4 \\ &\quad - (Z_{24}) \sin Q_2 \cos Q_3 \sin Q_4, \\ H_{21} &= -i Z_4 \{ \cos Q_2 \cos Q_3 \sin Q_4 - (Z_{23}) \sin Q_2 \sin Q_3 \sin Q_4 \\ &\quad + (Z_{34}) \cos Q_2 \sin Q_3 \cos Q_4 \\ &\quad + (Z_{24}) \sin Q_2 \cos Q_3 \cos Q_4 \}. \end{aligned} \right\} \quad (2.2.89c)$$

ここに、 $Z_{jk} = Z_j / Z_k$  であり、第 $m$ 層について $Q_m = \kappa_m d_m = 2\pi d_m / \Lambda_m$  で、 $\Lambda_m$  はこの層内の波長である。したがって、 $Q_m = 0$  ( $m \neq 2$ ) とすればその層は存在しないことになる。また、与えられた $Q_m$  に対応する周期は

$$T_m = 2\pi d_m / C_{Tm} Q_m \quad \dots\dots\dots (2.2.90)$$

である。

なお、3層以上の多層問題については、式(2.2.82)から導いたような方法で固有振動数または固有周期を導くのは簡単でなく、一般には数値計算によつて $\eta(i\omega)$ の卓越値を求める必要がある。

### 2. 3. 1. 多層地盤例

ここでは、応答解析の対象にした地盤として、下記の1)，2)に示すような実測された2系統の平行多層地盤例の層特性を示す。

#### 1) L地盤系の層特性

ここで示す地盤例は、道路橋示方書・同解説 V 耐震設計編（昭和55年）<sup>2-16)</sup>（以下では道示Vと略記する）に記載されている静岡県内の地盤であり、本論文ではこれらをL地盤系と呼ぶ。

表-2.3.1 (a)，(b)に、L地盤系の地盤名とその地盤の地盤種別および地盤の特性値 $T_g$ ，各層の横波速度 $C_r$ ，層厚 $d$ ，密度 $\rho$ を道示Vから再掲した。

しかし、道示Vには各層の層厚、N値、土質、S波速度、密度しか与えられていない。SH波のみを対象にした解析にはこれだけで十分であるが、SV波を対象にした解析にはS波速度のみならずP波速度も必要であるので、P波速度またはポアソン比を与える必要がある。ここでは簡単のために、基盤上の表層を全て $\nu=0.45$ ，基盤を $\nu=0.4$ として示した。

地盤の特性値 $T_g$ は、微小ひずみ領域における表層地盤の基本固有周期であり、震度法における設計震度の地盤補正係数を定める耐震設計上の地盤種別のための基準値であり、

$$T_g = 4 \sum_j (d_j / C_{rj}) \quad \dots\dots\dots (2.3.1)$$

として道示Vに定義されている。ここに、 $\sum_j$ は基盤面より上にある全層数 $j$ について和を取ることを示す。

これは、基盤から地表までの横波の伝播時間が、与えられた地盤のそれと同一であるような、仮想の単一の表層のみが基盤上に存在する場合の、地表で腹、基盤で節となる第1次固有周期と解釈できる。また、表-2.3.1 および後で示す表-2.3.2 には、このように考えた仮想の表層と基盤とからなる2層化地盤の表層の平均横波速度 $C_r'$ ，平均密度 $\rho'$ ，表層厚および基盤に対する表層の特性抵抗比（ $\rho C$ コントラストと呼ぶ）も示した。

なお、道示Vによる地盤種別と地盤の特性値との関係は下表のようである。

地盤種別	地盤の特性値 $T_g$ (s)
I 種	$T_g < 0.2$
II 種	$0.2 \leq T_g < 0.4$
III 種	$0.4 \leq T_g < 0.6$
IV 種	$0.6 \leq T_g$

## 2) H地盤系の層特性

ここで示す地盤例は、港湾技研資料 No.285 (1978)<sup>2-17)</sup> (以下では港技資料と略記する) に記載されている広島湾沿岸の地盤であり、本論文ではこれらをH地盤系と呼ぶ。

表-2.3.2 (a), (b), (c), (d)に、H地盤系の層性質をL地盤系の場合と同様に示す。この文献でもポアソン比は与えられていない。しかし、土質柱状図に詳細に土質が記載されているので、飽和土の非排水状態におけるS波速度とポアソン比の関係<sup>2-18)</sup>などを参考にしてポアソン比を推定し表中に示した。

表-2.3.3 に、上記の推定の目安とした土質とポアソン比の対応を示す。

なお、道示Vの地盤種別の定義によると、 $T_g=0.2$ はⅡ種地盤であるが、0.2がⅠ種とⅡ種地盤の境界値であることと地盤例の数のバランスを考慮して、H地盤系では $T_g=0.2$ の地盤をⅠ種地盤に分類した。

### 2. 3. 2. 多層地盤にS波が垂直入射する場合

いま、図-2.2.4 で示した第 $n+1$ 層を基盤、境界(n)を基盤面、境界(1)を地表面と考える多層地盤に対して、基盤からS波が垂直に入射する最も単純な場合を考える。

S波が垂直入射する場合は、2. 2. 3. 4)でも述べたように、SH波またはSV波のどちらで考えても同じで、水平成分のみの応答となる。ここでは、SH波と考えて式(2.2.88)を用いた解析結果を示す。

図-2.3.1 は、表-2.3.1 に示したL地盤系のうちの4地盤例に対して、横軸を無次元円振動数  $Q_2 (= \omega d_2 / C_{T2})$  として地表の振動数応答関数  $|\eta(i\omega)|$  を示す。なお、以下では混同の恐れのない限り、 $|\eta(i\omega)|$  を単に  $\eta$  と記す。この図には、各地盤についての  $\eta$  に局所的なピークがいくつか存在する。しかし、各地盤における最大のピーク値は、4層問題であれば  $Z_0$  を基盤の特性抵抗として、 $2Z_0 Z_3 / (Z_2 Z_4)$  を越えることはない。

図-2.3.1 および後で示す結果を含めて、 $\eta$  の局所的なピークの  $j$  番目の値  $\eta_j$  に対応する周期  $T_j$  を、 $T$  の大きい方から順に  $T_1, T_2, \dots$  として、表-2.3.4 に示す。ここに、 $T_j$  は式(2.2.90)に示したように、それぞれの地盤に対して

$$T_j = 2\pi d_2 / C_{T2} Q_{2j} \quad \dots\dots\dots (2.3.2)$$

である。ただし、 $Q_{2j}$  は  $j$  番目のピーク  $\eta_j$  を生ずる  $Q_2$  の値である。

また、 $T_g$  を基準とした場合の高次の固有周期を  $T_j$  に対応させて ( ) 内に、さらに、 $T_1$  に対する  $\eta_1$  と  $T_g$  に対する  $\eta_g$  の値も示した。ただし、

$$\eta_g = T_g Z_0 / \{2 \sum_j (\rho_j d_j)\} \quad \dots\dots\dots (2.3.3)$$

であり、 $Z_0 = \rho_0 C_{T0}$  は基盤の特性抵抗である。

表-2.3.4 によると、前述の意味を持つ  $T_g$  は、重複反射の結果である  $T_1$  より必ず大きいこと、しかも、地盤L6, L11, L16のように基盤上の各層の定数が大きく異なる場合には両者の差が大きいことが分かる。特に、L6, L11の場合には層定数の急変



する境界に対する共振周期が卓越すると考えられ、高次固有周期にもその差が現れている。

$\eta_0$  と  $\eta_1$  は、ここに示した解析例では比較的良好に一致するが、図-2.3.1 の L4 の  $\eta$  から明らかなように、 $\eta_1$  は必ずしも  $\eta$  の最大値ではなく、むしろ  $Q_2$  の大きいところで最大値  $2Z_0Z_3/(Z_2Z_4)$  に近づく場合が多い。その場合には  $\eta_0$  と  $\eta_1$  がほぼ等しくても  $\eta_0$  が  $\eta$  の卓越値を示すことにならない。地盤の粘性性質を考慮した場合には、 $Q_2$  が大きい（周期  $T$  が小さい）ところでは  $\eta$  が急激に減衰することが示せるが<sup>2-19)</sup>、通常地震周期の範囲で大きな  $\eta$  を生じる場合には問題となる場合がある。

### 2. 3. 3. 多層地盤へ S V 波が任意角度で入射する場合

#### 1) 地表の振動数応答関数

ここでは、表-2.3.1 および表-2.3.2 に示した L 地盤系および H 地盤系を対象にし、S V 波が基盤へ任意角度で入射する場合について、基盤への S V 波の入射角を  $\gamma_0$  とし、粒子速度の水平動および上下動についての振動数応答関数  $|\eta(i\omega)|$  を、それぞれ  $\eta_x$ （水平動）、 $\eta_z$ （上下動）、横軸を無次元円振動数  $Q_2$  として検討する。

2. 2. 2. で示したように、任意の入射角  $\gamma_0$  についての応答を解析できるが、ここでは、特別な波動挙動を生ずるような入射角についての応答を調べる目的で、垂直入射（ $\gamma = 0^\circ$ ）および対象地盤の一つまたは二つの境界で、臨界角よりわずかに小さい入射角および臨界角をわずかに越えた入射角を選んで応答解析を行った。なお、ここで示す以外の入射角に対する応答については後で述べる。

表-2.3.1 と表-2.3.2 の中で示したように、L 地盤系では基盤のポアソン比をすべて  $\nu = 0.40$  としているため、入射角  $\gamma_0 = 25^\circ$  は基盤面の反射 P 波についての臨界角（ $\gamma_c = 24.1^\circ$ ）をわずかに越えた入射角であり、 $\gamma_0 = 30^\circ$  は基盤面より上にある境界での反射または透過 P 波について、臨界角をわずかに越えた入射角である。また、H 地盤系ではほとんどの場合基盤のポアソン比が  $\nu = 0.33$  であるので、 $\gamma_0 = 31^\circ$  は基盤の反射 P 波に対する臨界角（ $\gamma_c = 30.2^\circ$ ）をわずかに越えた入射角である。

ここに示す解析例の、たとえば L 地盤系については表-2.3.1 に示したように、入射角を次第に増加するとき、ほとんどの場合基盤面における反射 P 波に対する入射角が最初に臨界角を越え、透過または反射 S V 波に対して臨界角を越える場合はない。しかし、実際に多くの地盤がそうであるように、基盤上の各層の特性抵抗が基盤のそれより大きくない場合には常にこの状態である。

#### (1) I 種地盤の振動数応答関数

図-2.3.2~6 は、L および H 地盤系の I 種地盤に属する地盤に対して、3 または 4 種類の S V 波の入射角について、地表における振動数応答関数  $\eta_x$ 、 $\eta_z$  を  $Q_2$  に対して示した。ただし、式(2.2.44b) に示したように、 $Q_2$  および補助軸の振動数  $f$  (Hz) は入射角  $\gamma_0$  によって異なるが、ここで対象にした地盤ではその差は高々 3 % であるので、垂直入

射 ( $\gamma_0=0^\circ$ ) の場合の値を示している。以下の図の  $Q_2$  もすべて同様である。

〔水平動  $\eta_x$ 〕： I 種地盤では、一般に基盤と表層全体との  $\rho C$  コントラスト値が大きい (コントラストが少ない) ため、 $\eta_x$  は垂直入射において  $Q_2$  に関しては比較的平均した値で周期的な応答を示す。しかし、I 種地盤の中では最も  $\rho C$  コントラスト値の小さい (コントラストが大きい) L4 は、固有振動数毎の  $\eta_x$  の変動が大きく、特に、第2、第4次固有振動数のそれは第1次のそれより大きい。

基盤の反射P波に対する臨界角までは、 $\eta_x$  は垂直入射の値より次第に減少するが、臨界角に達すると L2, H12 以外は、第2次以上の固有振動数において鋭い増減を示す。H20 ではそのピーク値は約  $1.6\eta_1$  とかなり大きい。入射角が基盤面以外の境界に対する臨界角をも越えると、L4 に示されているように  $Q_2$  の変化に対して一層鋭い増減を示しピーク値もさらに大きくなる。この鋭い増減を示す部分は、極大値と極小値が順不同で必ず隣接している。このことは、入射波の僅かな振動数の違いで応答が急変することを示している。しかし、H12 の  $\gamma_0=31^\circ$  の場合には応答の極大値と極小値が隣接していても  $Q_2$  について比較的離れて存在し、この部分全体としては約10Hz の範囲で比較的緩やかに変化している。

〔上下動  $\eta_z$ 〕： 入射角が基盤またはそれより上層の境界に対する臨界角を越えると、L2, H12 以外は  $Q_2$  について局部的に鋭く高いピーク値を示す。たとえば、L4 において  $\gamma_0=30^\circ$  のとき  $Q_2$  が  $3\pi/2$  を越えた付近では、 $\eta_z$  がピークとなる  $Q_2$  は水平動でも鋭いピークを生じた値であり、水平動と上下動が同じ振動数で共に応答の極大値を生じることを示す (以下ではこの様な場合を平行型と呼ぶ)。

一方、H12 の  $\gamma_0=31^\circ$  における  $Q_2=3\pi/2$  付近の  $\eta_x$  のV型の溪谷形と  $\eta_z$  の緩やかな盛り上がり形の対応関係は、水平動の極小値に上下動の極大値が対応することを示し (以下ではこの様な場合を交差型と呼ぶ)、前述した平行型と逆の対応関係も存在している。

## (2) II 種地盤の振動数応答関数

図-2.3.7~11 は、II 種地盤の振動数応答関数を示す。

〔水平動  $\eta_x$ 〕： 基本的には I 種地盤の場合と同様であるが、L6 では垂直入射のとき第3次固有振動数での  $\eta_x$  の値が第1次のその約3倍にも達する。また、 $Q_2$  が  $2\pi$  までの範囲では臨界角を越えた入射角に対して、固有振動数での卓越応答は余り大きな変動を示さず、L8 以外の地盤は垂直入射による卓越応答が最大である。L8 は I 種地盤と同様に、入射角が基盤および表層の臨界角を越える毎に卓越応答が鋭く大きくなる。

〔上下動  $\eta_z$ 〕： I 種地盤の場合と同様であり、L6, L8, H21, H56 は臨界角を越えた入射角に対して平行型を示し、H48 は  $\gamma_0=31^\circ$  のとき  $\eta_x$  と  $\eta_z$  の対応関係が  $Q_2$  が  $\pi/2$  と  $3\pi/2$  付近の2箇所ですべて上述した H12 の場合によく似ており、二つのピークが共に交差型である。

## (3) III 種およびIV種地盤の振動数応答関数

図-2.3.12~16に、Ⅲ種地盤の振動数応答関数を示す。また図-2.3.17~20に、Ⅳ種地盤の振動数応答関数を示す。

Ⅲ種およびⅣ種地盤について、まとめて特徴を調べると以下のようなものである。

①垂直入射時の水平動において、第2次以上の固有振動数で第1次固有振動数の応答より大きい応答を示す例が多い。

②入射角が臨界角を越えた応答について、水平動と上下動の関係が、臨界角を越える層によって平行型または交差型を示す場合と、さらに両者が混合された場合が生じる。たとえば、L9において  $\gamma_0 = 25^\circ$  のとき  $Q_2 = \pi$  付近では交差型であるが、 $Q_2 = 3\pi/2$  を越えた付近では平行型となり、 $\gamma_0 = 30^\circ$  のとき丁度  $Q_2 = 3\pi/2$  で平行型である。また、L11は  $\gamma_0 = 25^\circ, 30^\circ$  で共にきわめて明瞭な交差型である。一方、H45において  $\gamma_0 = 31^\circ$  のとき  $Q_2 = \pi/4$  の付近では  $\eta_x$  の形から考えると交差型のようであるが、対応する位置の上下動は  $\eta_z$  の二つのピークが相接して並び、それぞれのピークは平行型である。このように交差型と平行型が併存するような場合を以下では混合型と呼ぶ。H66においても  $\gamma_0 = 25^\circ$  でこの混合型が見られる。

本解析例から判断する限り、交差型の場合の  $\eta_z$  の卓越値の方が他の型の卓越値より大きいようである。

## 2) 内部層境界の振動数応答関数と振動モード

ここでは、地盤内部の振動挙動を把握するために、内部境界での振動数応答関数と、地表での振動数応答関数がピークとなるかまたは急変する時の  $Q_2$  (円振動数  $\omega$ ) における地盤の振動モードを検討する。

図-2.3.21(a)~(d)に、地盤L6の境界(2)から順に境界(5)までの、境界における振動数応答関数を1)で対象にした入射角について示す。

境界(2)より下の境界では  $Q_2$  が  $2\pi$  までの範囲で節となる円振動数が存在し、下方の境界になるに従って節の数は次第に増加し、対応する節の位置は低い円振動数側に変化する。また、水平動の第1次、第3次、第5次、第7次固有振動数における振動数応答関数のピークと、上下動のピークに対する各境界間の対応関係が、境界(3)までの各境界と境界(4)以下とはつきり区別される。地盤L6においては第3層と第4層の間の  $\rho C$  コントラストが全層中最も大きく、これらの応答に強く影響していると考えられる。

図-2.3.22(a)~(c)に、地盤L9の境界(2)から境界(4)までの境界の振動数応答関数を1)で示した入射角に対して示す。

この場合についてもL6の境界(3)までの応答の特性と同様である。しかし、L6場合には、境界(2)または(3)のいずれかに現われていた卓越応答が、地表でも同じ振動数で卓越応答となっているが、L9の場合には、境界(2)の上下動における  $\gamma_0 = 25^\circ$  の  $Q_2 = \pi$  付近の卓越応答など、地表に現われていない振動数で内部に卓越応答が存在する。

図-2.3.23(a)~(c)に、地盤H20の  $\gamma_0 = 0^\circ, 31^\circ$  に対する振動数応答関数の局所

的なピークでの $Q_2$  値（円振動数 $\omega$ ）における振動モードを示す。

地盤H20は1種の3層地盤で全地盤例の中で最も単純かつ $T_0$  が最も小さい場合である。ここには、図-2.3.6 の図中に示した $\omega$ についての振動モードが示されている。

垂直入射に対しては基盤を節とする第3次までの固有振動モードがはっきり示されている。 $\gamma_0 = 31^\circ$  に対する水平動の第1次卓越振動数に相当する $\omega = 25.5 \text{ rad/sec}$  では、水平動は表層全体が平行移動した形を持ち、上下動は値は小さいが基盤を節とする第1次モードの形を持つ。水平動と上下動が平行型となる $\omega = 317.3 \text{ rad/sec}$  では、上下動は地表を含む第2層内だけで境界(3)を節とする第1次固有モードの形である。また、水平動は地表と基盤を節とする第2次モードを平行移動した形となっている。

図-2.3.24(a)～(c)に、地盤H48の $\gamma_0 = 0^\circ, 30^\circ, 31^\circ$  に対する振動数応答関数の局所的なピークでの $Q_2$  値（円振動数 $\omega$ ）における振動モードを示す。

ここには、垂直入射に対する水平動の第1, 2次固有振動モード、および基盤面の臨界角を越えた水平動と上下動が交差型となる部分のモードが示されている。交差型となる円振動数における上下動は、 $\omega = 86.3, 193.5 \text{ rad/sec}$ それぞれについて、基盤面を節とする第1次および第2次固有モードの形となる。また、前者の円振動数における水平動のモードは図-2.3.23(c)に示したH20の、 $\omega = 317.3 \text{ rad/sec}$ に対するモードとほぼ一致している。

図-2.3.25に、地盤H0の $\gamma_0 = 25^\circ$  に対する振動数応答関数の局所的なピークの $Q_2$  値（円振動数 $\omega$ ）における振動モードを示す。

$\omega = 43.4 \text{ rad/sec}$  では、垂直入射の水平動の第2次固有振動数に対応しており、この図から臨界角を越えた $\gamma_0 = 25^\circ$  では振動数応答関数として卓越ピークが明瞭でなくとも、やはり第2次のモードを持つことが確認される。また、この場合も交差型となる $\omega = 131.4 \text{ rad/sec}$ での上下動は、地表を腹とする第1次モードに近いが基盤が節とならない。なお、このモードは図-2.3.23(c)の $\omega = 328.8 \text{ rad/sec}$ での水平動と上下動のモードに酷似しており、そこでは平行型となる水平動のピークが急減して0となっている。

### 3) 2層化地盤の地表の振動数応答関数

2.3.2. で述べたように、実地盤の振動特性を把握する上で、実地盤を2層問題として取り扱うことができれば便利であることが多い。垂直入射のみを考える場合には、2層化地盤がある程度実地盤の振動特性を表現し得ることが示された。ここでは、入射角が任意である場合に対して実地盤と2層化地盤の振動特性を比較する目的で、2層化地盤を対象にする。

図-2.3.26(a)～(c)に、それぞれL6, L9, L11について表-2.3.1 に示した方法で2層化した地盤に対する地表の振動数応答関数を示す。ただし、この場合の $Q_2$  は元の地盤の応答と比較し易くするために、元の地盤の地表を含む層の層厚と平均化した速度 $C_T'$ を用いて $Q_2 = \omega d_2 / C_T'$ とした。

2層化しない実際地盤に対する図-2.3.7, 12, 13とそれぞれを比較すると, L 6, L 9 など2層化による $\rho C$ コントラストが余り大きくない場合は, 水平動および上下動ともに臨界角を越えた特別な入射角に対する卓越応答が, 2層化することにより小さく評価される。一方, L 11のように $\rho C$ コントラストが大きくなる場合には, 逆に卓越応答が大きく評価されることもある。また, 水平動および上下動に対して多層地盤解析とは卓越振動数がかなり異なる。

#### 4) 地盤のポアソン比を変えた場合の振動数応答関数

一般に, 実地盤の土質からポアソン比を正確に推定することは容易でなく, P波の実測値が与えられることが望ましいが, さきに述べたようにここで対象にした地盤については, ポアソン比を推定しなければならなかった。そこで, ポアソン比の違いが応答に及ぼす影響を調べる目的で, 特にSV波速度の低い層を含むL 16を対象に検討する。

図-2.3.27に, 地盤L 16においてSV波速度が100m/sec以下の層(第2, 4, 5層)のポアソン比を $\nu=0.49$ とした場合を地盤L 16'として, 地表の振動数応答関数を示す。

基盤上の全ての層のポアソン比を $\nu=0.45$ とした図-2.3.17と比較すると, 水平動については垂直入射の第3次固有振動数での応答のピーク値が大きく異なる以外は, ここで示した $Q_2$ の範囲で両者はほぼ等しい。上下動については $\gamma_0=25^\circ, 30^\circ$ における卓越応答値およびそのときの振動数など, 水平動の場合より両者が異なる点が多い。

#### 5) 滑動境界を持つ地盤の振動数応答関数

ここでは, 2.2.2.4)で述べた滑動境界を設定した地盤に対する解析例を示す。

滑動境界を設定できるような層定数を持つ地盤例はないが,  $\rho C$ コントラストが大きい層境界または薄い粘土層がある場合を選んで設定した。

図-2.3.28(a), (b)に, それぞれL 6の境界(3)およびH 24の境界(5)を滑動境界とした場合の地表の振動数応答関数を示す。ただし, H 24の場合は基盤面から2番目の層を取り除いて, 代わりに滑動境界を設定した場合である。なお, 横波が垂直入射する場合には地表の応答は勿論存在しない。

それぞれを図-2.3.7 および図-2.3.19に示された元の地盤の振動数応答関数と比較する。

L 6の水平動については, 振動成分で重要な低次の第1, 第2固有振動数付近の応答が消滅し, 第3, 5, 7次に対応する応答が極めて鋭く現われる。上下動の卓越応答の振動数は両者がよく対応するが, 応答のピーク値は滑動境界を設定した地盤の方が大きい。

H 24の水平動は, 除かれた層による固有振動数のずれはあるが, 第1, 2次の卓越振動数での応答はそのまま現われている。しかし, この場合もその現れ方は極めて鋭く, 狭い振動数範囲でしか現われない。

## 6) 最大応答比

2. 3. 3. 1) で選んだ入射角以外の入射角に対する応答を調べる目的で、 $0^\circ \leq \gamma_0 \leq 90^\circ$  の範囲の入射角 ( $1^\circ$  刻み) について、一定の振動数範囲内の振動数応答関数の最大値 ( $\eta_{x\text{MAX}}, \eta_{z\text{MAX}}$ ) を求め、垂直入射における第1次固有振動数での水平動の振動数応答関数の値 ( $\eta_1$ ) に対する比を最大応答比と呼び、水平動および上下動に対してそれぞれを  $\eta_x^* = \eta_{x\text{MAX}} / \eta_1$ ,  $\eta_z^* = \eta_{z\text{MAX}} / \eta_1$  として検討する。

図-2.3.29(a), (b)に、それぞれ地盤L6およびL9に対する最大応答比  $\eta^*$  を示す。ただし、最大応答は0から40Hzの振動数範囲で0.2Hz刻みで求めた。

最大応答は常に同じ次数のモードに対して選ばれるわけではなく、入射角によつてはそれまでと異なるモードのピークが卓越値となり得ることに留意する必要がある。

地盤L9の場合は  $\eta_1 = 4.07$  であり、垂直入射の最大応答は第7次固有振動数にある。水平動の最大応答比  $\eta_x^*$  は基盤に対する臨界角 ( $\gamma_0 = 25^\circ$ ) までは滑らかに減少し、そこで一旦小さなピークを形成する。さらに、表層の内部境界に対する臨界角 ( $\gamma_0 = 30^\circ$ ) 付近でやや大きなピークを形成し、 $\gamma_0 = 45^\circ$  以上の入射角では小さな凹凸を繰り返しながらほぼ2の最大応答比を保つ。地盤L9では垂直入射による水平動の最大応答比が最大であるが、地盤L6では  $\gamma_0 = 45^\circ$  以上の入射角で最大応答となる。上下動の最大応答比  $\eta_z^*$  の値はこれらの例では水平動より大きいが、全体の傾向は水平動の場合と同様である。ただし、最大応答は表層の内部境界に対する臨界角を越えた入射角で発生している。

これらの結果からは、すでに示した特別な入射角での卓越応答を検討するだけでは十分でないと判断される危険があるが、たとえば  $\gamma_0 = 40^\circ$  以上における卓越応答の最大値は、 $f = 40\text{Hz}$  に近い高い振動数で生じており、粘性を考慮した地盤においては垂直入射に対する卓越応答が最大となる場合がほとんどである。

図-2.3.30(a), (b)に、比較のために地盤L9にSH波が入射した場合について、振動数応答関数と最大応答比 (0~50Hz) を示す。

この場合の振動数応答関数は図-2.3.12と比較するとよく分かるように、SH波入射においては臨界角が存在しないため、2. 2. 3. 3) で述べた2層地盤の場合と同様の応答を示し、入射角が増加するに従って応答は次第に一樣に減少する。最大応答比が  $15^\circ \leq \gamma_0 \leq 30^\circ$  で小さく振動しているのは、最大値を捜す段階で十分狭い振動数間隔を設定しなかったため、鋭いピークの値が正確に捕らえられなかったことが原因と考えられる。

## 第2章 第4節 結 論

### 1) 半無限弾性体内の波動挙動

半無限弾性体の自由境界へ平面波が入射する場合の波動挙動は以下のである。

(1) SH波が入射する場合、SH波のみが反射し反射角は入射角と等しく、反射変位波は同振幅・同位相で自由境界の振幅は2倍となり、反射応力波は同振幅・逆位相である。

(2) P波が入射する場合、一般にP波とSV波がSnellの法則を満足する実数の角度で反射する。しかし、ポアソン比によっては反射P波が存在しない入射角がある。

(3) SV波が入射する場合、P波とSV波が反射するがポアソン比によってはSV波のみが反射する入射角がある。また、入射角がポアソン比によって決まる臨界角 $\gamma_c$ を越えると、反射P波が実体波でなくなり表面波が生じる。

(4) SV波の入射角が臨界角となる付近では、主として反射P波（表面波）の寄与により、自由境界の方向の変位および直応力成分は他の入射角に対して極大値となる。

(5) SV波の入射角 $\gamma$ が $\gamma_c \leq \gamma \leq 45^\circ$ の範囲であれば、発生する表面波による粒子運動は自由境界付近において前進回転の楕円となる。また、入射角が $45^\circ \leq \gamma$ の範囲であれば、表面波の自由境界付近の粒子運動は後退回転の楕円運動となる。したがって、入射角が $45^\circ$ を挟んで変化するような場合には、粒子の回転方向の急変にともなう波動挙動の変化が現われることが予想される。

(6) 自由境界近傍では、入射波に無関係に定義されるRayleigh 表面波が独立して存在することができ、その粒子運動は後退回転の楕円運動である。

### 2) 二つの半無限弾性体が接合された場合の波動挙動。

(1) 境界へSH波が入射する場合、SH波のみが反射および透過するが、透過側のS波速度が入射側のS波速度より大きいときには、両者の速度比によって定まる臨界角が存在し、入射角が臨界角を越えると透過SH波が実体波でなくなる。

(2) 境界へP波またはSV波が入射する場合、P波とSV波が反射および透過するが、入射角が両媒体のP波およびS波の速度比で定まる臨界角を越えると、それらの波はまたは透過波が境界波となる。

(3) 境界近傍では、入射波に無関係に定義されるStoneley 境界波が独立して存在することができる。しかし、両媒体の性質によってその存在が制限される。

### 3) 平行多層地盤へSV波が任意角度で入射する場合の波動挙動

多層実地盤例に対する振動数応答関数から以下のように結論できる。

(1) 地表の水平動応答  $\eta_x$  の局所的なピークの数とそれを生じる円振動数は、ここで考えた範囲で入射角  $\gamma_0$  が変化しても、2. 3. 2. で述べた垂直入射時の場合とほとんど同じであり、ピークの数値の最大値は  $\gamma_0 = 0^\circ$  で存在する。これはどの例においても臨界角に達するのはP波のみであるためと、地表へのSV波の入射角がどの例でも  $\gamma_2 \leq 10^\circ$  であり、SV波の伝播経路全体の距離の変化が少ないためである。

(2) 地盤L2のように基盤を含めて層定数にあまり差がない場合には、応答が卓越する振動数は明瞭でなく、 $T_0$  がそのまま適用できる。

(3) 入射角  $\gamma_0$  が臨界角を越えて極めて大きな  $\eta_z$  を生ずるときの円振動数  $Q_2$  は、水平動の第1次固有振動数に比較して高い場合が多く、本解析例では水平動の第2次固有振動数より低い場合はない。

(4) 一般に、入射角が基盤面での反射P波に対する臨界角に達する場合と、さらに基盤面以外の境界に対して臨界角に達する場合の  $\eta_z$  の最大値の大小には一定の傾向はないが、その卓越振動数  $Q_2$  は基盤に対する臨界角を越えた場合の方が低い。

(5) 地表の上下動応答  $\eta_z$  の局所的なピーク生じる円振動数  $Q_2$  は、入射角  $\gamma_0$  が臨界角に達するまでは水平動のピークを生ずる  $Q_2$  に一致することはない。しかし、臨界角を越え  $\eta_z$  が大きくなる場合には、2. 3. 3. 2) で述べた平行型および混合型のように、 $\eta_x$  が極大値となる  $Q_2$  と  $\eta_z$  が極大値になる  $Q_2$  とが一致する場合がある。また、交差型のように  $\eta_x$  が極小値となる  $Q_2$  と  $\eta_z$  が極大値となる  $Q_2$  とが一致する場合もある。

(6) 地盤の振動モードから検討すると、平行型、混合型、交差型の間には本質的な差はなく、 $\eta_z$  が多層内で地表を腹とする低次のモードを持つとき極大値になり、 $\eta_x$  はそのときの  $Q_2$  に対応するわずかな振動数の違いで、どの型を選ぶかが決まると考えられる。

(7) 地表の応答の固有振動数に対応する内部境界の応答  $\eta_x$  ,  $\eta_z$  は、共に地表のそれより小さい。垂直入射のとき境界(2)では理論上、 $Q_2 = \pi/2, 3\pi/2$  で  $\eta_x = 0$  (その円振動数で節)となるが、本解析例では  $\gamma_0$  の他の値に対してもその境界への入射角が小さいため節となっている。

(8) 内部境界であっても層間の  $\rho C$  コントラストが大きい境界では、 $\eta_x$  ,  $\eta_z$  共に比較的大きく、応答が卓越する円振動数も地表のそれと異なるから、地表面下であるという理由だけで応答を軽視することはできない。下層の境界ほど  $\eta_x$  の節が増加するが、臨界角を越えた境界の応答に目立つほどの特別な傾向は本解析例ではみられない。

(9) 実際の地盤と  $T_0$  の定義に従って2層化したモデル地盤の応答は、L2のように2層化が比較的無理でない場合をのぞいて一般に相当異なる。たとえば、実際地盤のL6とL9の場合には入射角によらず、それぞれ第3次および第2次の固有振動数での  $\eta_x$  が、2. 3. 2. で述べた  $\eta_0$  よりかなり大きく、一方2層モデルではこれらの振動数で  $\eta_0$  を越えない。したがって、地盤の粘性効果を見捨てるならば、多層地盤と2層化地盤について応答が卓越する振動数は実地震波の振動数範囲内で相当異なることがあると思われる。さらに、2層化地盤では内部境界に対して臨界角に達した場合の応答を評価できない。



(10) L地盤系のIV種地盤のように、SV波速度が100m/sec以下の軟弱層を含む場合には、基盤上の各層のポアソン比を一律に $\nu=0.45$ とすることは不合理であるかも知れない。そのような層に対して $\nu=0.49$ とすると、その層のP波速度は $\nu=0.45$ の場合の2.15倍になる。したがって、P波に関係する特性抵抗が変化し $\rho C_L$ コントラストも変わる。そのため水平動より上下動に対する影響が大きく、卓越振動数と応答値が変化する。しかし、地盤材料の動的ポアソン比の測定は簡単でなく、また弾性解析においてSV波速度の低いことが必ずしもポアソン比が大きいことを意味するとは限らず、P波速度を実測するのが確実であろう。

(11) 滑動境界モデルの応答は、本解析の範囲では特に水平動において極めて狭い範囲の振動数でのみ存在する。層厚と波長の比が小さい場合には、その層の特性抵抗が十分小さいときでも波動は比較的影響を受けないで通過することを考えると、実際の地盤構成に対してこのようなモデルが適用できる場合が存在するかについて十分検討する必要がある。

(12) SV波が任意角度で入射する場合、 $0 \leq \gamma_0 \leq 90^\circ$  の範囲で最大応答比を考えると、振動数の低い範囲で水平動が最大応答を生ずる入射角は、垂直入射角、基盤に対する臨界角、表層の内部境界に対する臨界角のいずれかである。上下動が最大応答を生ずる入射角は、基盤または表層の内部境界に対する臨界角のどちらかである。

(13) ここで対象にした地盤の地表の振動数応答関数から、入射波の振幅に対する比すなわち応答倍率が10以上にもなる入射角が存在することが分かる。このような大きな振幅をそのまま設計に用いることは一般に無理であろう。

しかし、振動数応答関数および最大応答比などから類推できるように、入射角が臨界角を越えて極めて大きな応答を示すような場合は、一般にピークを形成する振動数および入射角の範囲が狭い。したがって、そのような応答は実地盤の粘性減衰などを考慮すると、実際現象としては限られた状態でのみ存在し得ると考えられる<sup>2-19)</sup>。

表-2.3.1(a) L地盤系の層定数

地盤名	地盤種別 T <sub>G</sub> (s)	C <sub>T</sub> (m/s)	ρ (t/m <sup>3</sup> )	d (m)	ν	C <sub>T</sub> ' (m/s)	ρ' (t/m <sup>3</sup> )	ρ C コントラスト
L 2	I 0.10	333.3	2.1	2.7	0.45	348.0	2.10	0.696
		321.5	2.1	2.3				
		◆ 398.8	2.1	3.7				
		◇ 500	2.1	∞	0.40	表層厚 8.7m		
L 4	I 0.12	165.6	1.4	2.1	0.45	183.3	1.71	0.299
		207.5	1.9	3.4				
		◆ 500	2.1	∞	0.40	表層厚 5.5m		
L 6	II 0.30	150.4	1.4	2.8	0.45	233.3	1.84	0.409
		205.5	1.9	3.2				
		160.1	1.4	1.4				
		◇ 318.5	2.1	4.5				
		295.3	2.1	1.2				
		◇ 328.9	2.1	1.1				
		282.0	1.8	3.3				
		◆ 500	2.1	∞	0.40	表層厚 17.5m		
L 8	II 0.21	157.7	1.4	3.9	0.45	161.9	1.67	0.257
		160.2	1.9	2.8				
		196.8	1.9	1.8				
		◆ 500	2.1	∞	0.40	表層厚 8.5m		

◆, ◇は基盤面へのSV波の入射角が,  $\gamma_0 = 25^\circ$  および  $\gamma_0 = 30^\circ$  のとき, 透過または反射P波に対して臨界角となる層を示す.  
ただし, L 2に対しては  $\gamma_0 = 23^\circ$  および  $\gamma_0 = 25^\circ$  である.

表-2.3.1(b) L地盤系の層定数

地盤名	地盤種別 T <sub>G</sub> (s)	C <sub>T</sub> (m/s)	ρ (t/m <sup>3</sup> )	d (m)	ν	C <sub>T</sub> ' (m/s)	ρ' (t/m <sup>3</sup> )	ρ C コントラスト
L 9	Ⅲ 0.43	118.7	1.9	3.1	0.45	242.8	1.95	0.451
		200.5	1.9	3.3				
		◇ 316.8	2.1	5.9				
		◇ 328.0	2.1	2.3				
		267.4	1.8	0.8				
		◇ 314.0	2.1	3.0				
		269.2	1.8	7.7				
		◆ 500	2.1	∞	0.40	表層厚 26.1m		
L 1 1	Ⅲ 0.44	164.5	1.4	8.2	0.45	206.4	1.66	0.326
		182.0	1.4	6.1				
		◇ 316.1	2.1	8.4				
		◆ 500	2.1	∞	0.40	表層厚 22.7m		
L 1 6	Ⅳ 1.17	70.0	1.2	4.3	0.45	116.9	1.57	0.141
		170.0	1.2	2.9				
		70.0	1.2	3.2				
		100.0	1.6	8.0				
		170.0	1.7	11.2				
		200.0	1.7	4.6				
		◆ 620	2.1	∞	0.40	表層厚 34.2m		

◆, ◇は基盤面へのSV波の入射角が,  $\gamma_0=25^\circ$  および  $\gamma_0=30^\circ$  のとき, 透過または反射P波に対して臨界角となる層を示す。

表-2.3.2(a) H地盤系の層定数

地盤名	地盤種別 T <sub>G</sub> (s)	d (m)	C <sub>T</sub> (m/s)	ρ (t/m <sup>3</sup> )	ν	C <sub>T</sub> ' (m/s)	ρ' (t/m <sup>3</sup> )	ρ C コントラスト
H 9	I 0.20	0.7	191	2.1	0.40	213.6	2.03	0.343
		2.9	165	2.0				
		0.6	215	1.9	0.46			
		1.4	236	2.1	0.40			
		0.8	299	2.1				
		1.7	215	2.0	0.42			
		0.8	341	2.1	0.40			
		0.7	341	1.9	0.46			
		∞	◆ 600	2.1	0.33			
H 1 2	I 0.20	6.2	226	1.9	0.40	264.1	1.84	0.386
		3.3	269	1.8	0.45			
		6.0	316	1.8				
		∞	◆ 600	2.1	0.33	表層厚 15.5m		
H 2 0	I 0.09	3.5	258	2.0	0.42	283.8	2.00	0.450
		2.8	324	2.0				
		∞	◆ 600	2.1	0.33	表層厚 6.3m		

◆:  $\gamma_0 = 31^\circ$  で基盤の反射P波の臨界角を越える

表-2.3.2(b) H地盤系の層定数

地盤名	地盤種別 T <sub>G</sub> (s)	d (m)	C <sub>T</sub> (m/s)	ρ (t/m <sup>3</sup> )	ν	C <sub>T</sub> ' (m/s)	ρ' (t/m <sup>3</sup> )	ρ C コントラスト
H 2 1	Ⅱ 0.30	2.5	197	2.0	0.45	158.8	1.93	0.243
		0.5	90	1.8	0.48			
		3.9	203	2.0	0.45			
		2.0	90	1.8	0.485			
		1.9	190	1.8	0.48			
		1.0	215	2.0	0.45			
		∞	◆ 600	2.1	0.33	表層厚 11.8m		
H 4 8	Ⅱ 0.37	1.9	90	1.8		172.5	2.00	0.274
		3.9	155	2.0				
		0.8	182	2.0	0.45			
		0.9	236	2.0				
		4.2	190	2.0				
		4.1	273	2.1	0.40			
		∞	◆ 600	2.1	0.33	表層厚 15.8m		
H 5 6	Ⅱ 0.24	4.0	197	2.0	0.45	224.2	1.97	0.351
		0.5	197	1.8	0.48			
		3.4	215	2.0	0.45			
		1.2	165	1.8	0.48			
		3.0	299	2.0	0.45			
		1.3	341	2.0				
		∞	◆ 600	2.1	0.33	表層厚 13.4m		

◆:  $\tau_0 = 31^\circ$  で基盤の反射P波の臨界角を越える

表-2.3.2(c) H地盤系の層定数

地盤名	地盤種別 T <sub>G</sub> (s)	d (m)	C <sub>T</sub> (m/s)	ρ (t/m <sup>3</sup> )	ν	C <sub>T</sub> ' (m/s)	ρ' (t/m <sup>3</sup> )	ρ C コントラスト
H 0	Ⅲ 0.47	4.3	165	1.9	0.46	184.0	1.91	0.491
		1.8	191	2.0	0.45			
		3.1	226	2.0				
		0.6	137	1.9				
		3.2	171	1.8	0.47			
		3.3	182	1.9	0.46			
		5.1	197	1.9				
		∞	◇ 341	2.1	0.40			
H 2 7	Ⅲ 0.53	3.5	90	1.7	0.48	233.8	1.92	0.356
		5.0	241	1.7				
		11.2	283	2.0	0.45			
		11.1	341	2.0	0.40			
		∞	◆ 600	2.1	0.33	表層厚 30.8m		
H 4 5	Ⅲ 0.41	0.9	197	2.0	0.45	152.4	1.85	0.224
		0.9	144	1.8	0.48			
		3.1	182	2.0	0.45			
		6.1	131	1.8	0.485			
		3.4	165	1.8				
		1.1	165	1.8	0.48			
		∞	◆ 600	2.1	0.33	表層厚 15.5m		

◆:  $\gamma_0 = 31^\circ$  で基盤の反射P波の臨界角を越える

表-2.3.2(d) H地盤系の層定数

地盤名	地盤種別 T <sub>G</sub> (s)	d (m)	C <sub>T</sub> (m/s)	ρ (t/m <sup>3</sup> )	ν	C <sub>T</sub> ' (m/s)	ρ' (t/m <sup>3</sup> )	ρ C コントラスト
H 1 1	IV 1.70	37.6	197	2.0	0.45	242.2	1.90	0.365
		4.7	182	2.0				
		2.8	182	1.4				
		11.8	290	2.0				
		7.2	310	2.0				
		6.9	286	1.4				
		7.1	286	1.8				
		5.7	286	1.7	0.48			
		5.8	313	1.9	0.46			
		4.9	324	1.9	0.45			
		4.3	341	1.8				
		2.7	341	2.1	0.40			
		∞	◆ 600	2.1	0.33			
H 2 4	IV 0.83	11.6	90	1.7	0.48	163.2	1.91	0.247
		3.8	190	2.0	0.45			
		1.7	290	2.1	0.40			
		4.9	290	2.1	0.45			
		0.5	226	1.7	0.48			
		11.5	334	2.0	0.45			
		∞	◆ 600	2.1	0.33	表層厚 34.0m		
H 6 6	IV 1.00	16.0	197	2.0	0.45	142.1	1.87	0.130
		2.1	174	2.0				
		1.5	90	1.7	0.48			
		3.1	90	1.4	0.45			
		7.5	90	1.7	0.48			
		5.4	236	2.0	0.45			
		∞	◇ 341	2.1	0.40	表層厚 35.6m		

◇, ◆:  $\gamma_0 = 25^\circ, 31^\circ$  で基盤の反射P波の臨界角を越える

表－2.3.3 土質とポアソン比

土 質	ポアソン比 $\nu$
Rock	0.33
Gravel, Gravel Sand (G.S.)	0.40
Clay G.S., Silt G.S.	0.42
Sand, Fine Sand, Rough Sand Mold, Top Soil, Sandy Clay	0.45
Silt Sand, Clay Sand, Silt G.S.	0.46
Sandy Silt	0.47
Silt, Clay, Clay Silt, Silt Clay, Sandy Loam	0.48
Clay Loam	0.485



表－2.3.4 振動数応答関数  $\eta$  と固有周期

地盤名	$T_G$ (s)	$T_1$ (s)	$T_G/T_1$	$T_2$ ( $T_G/3$ )	$T_3$ ( $T_G/5$ )	$T_4$ ( $T_G/7$ )	$\eta_G$	$\eta_1$
L 2	0.10	0.09	1.09	0.031 (0.033)	0.020 (0.020)	0.013 (0.014)	2.8	2.9
L 4	0.12	0.10	1.20	0.040 (0.040)	0.026 (0.024)	0.017 (0.017)	6.7	6.5
L 6	0.30	0.22	1.36	0.116 (0.100)	0.064 (0.060)	0.044 (0.043)	4.9	5.3
L 8	0.21	0.18	1.17	0.069 (0.070)	0.039 (0.042)	0.031 (0.030)	7.4	8.0
L 9	0.43	0.40	1.08	0.145 (0.143)	0.087 (0.086)	0.062 (0.061)	4.4	4.0
L 1 1	0.44	0.37	1.19	0.120 (0.147)	0.066 (0.088)	0.048 (0.063)	6.1	8.2
L 1 6	1.17	1.02	1.14	0.380 (0.390)	0.240 (0.234)	0.186 (0.167)	14.2	17.6

$$\eta_G = T_G Z_0 / \{2 \sum_j (\rho_j d_j)\}, \quad Z_0 = \rho_0 C_{T0}.$$

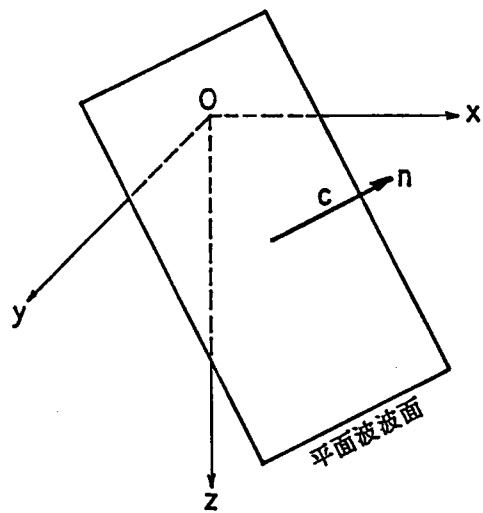


図-2.1.1 無限弾性体内の平面波

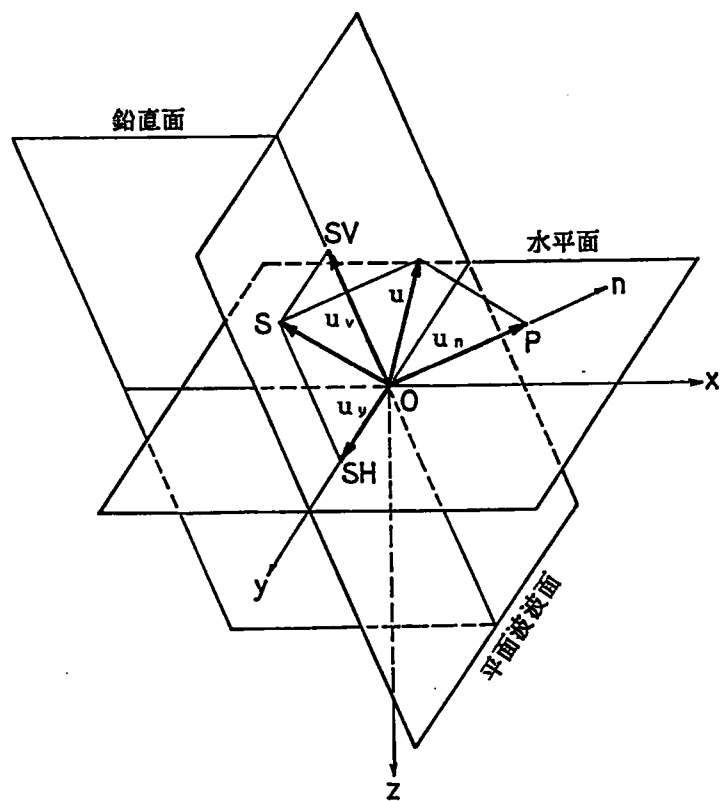


図-2.1.2 平面波とP波, SH波, SV波

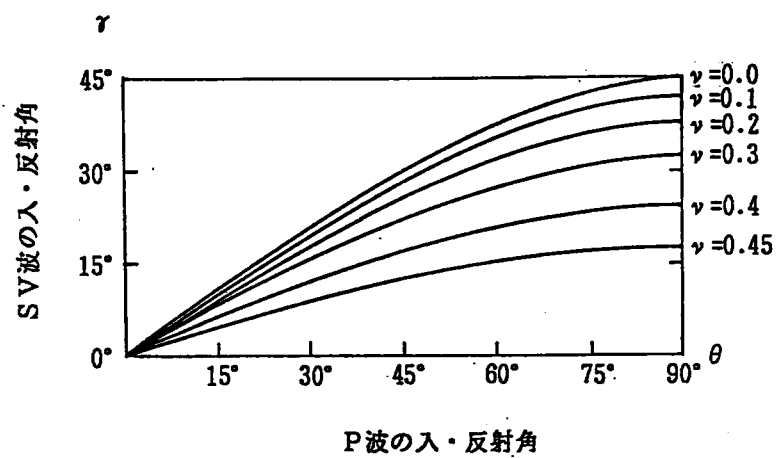


図-2.1.3 Snellの法則と Poisson ratio

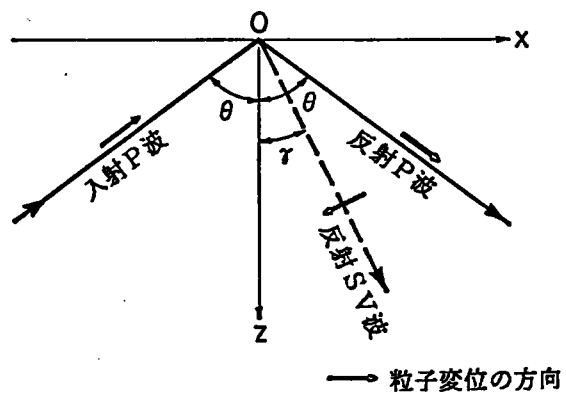


図-2.1.4 平面P波の入射と反射波

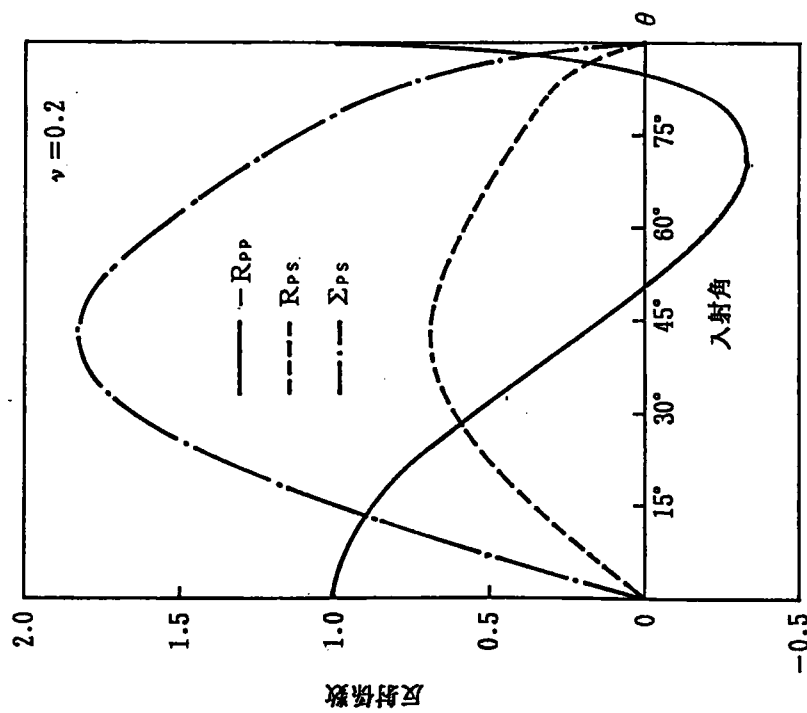


図-2.1.5 (a) P波入射に対するポテンシャルと  
最大せん断応力の反射係数  $\nu = 0.2$

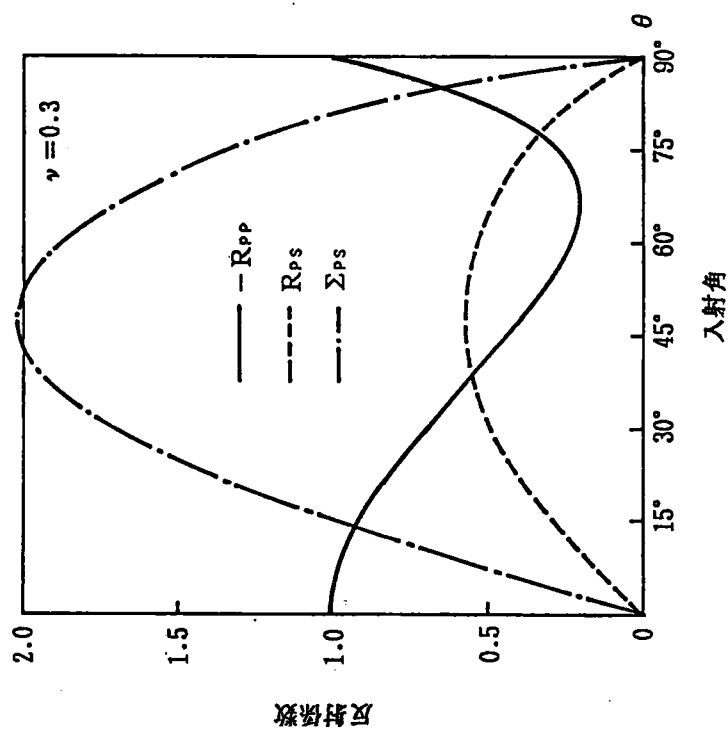


図-2.1.5 (b) P波入射に対するポテンシャルと  
最大せん断応力の反射係数  $\nu = 0.3$

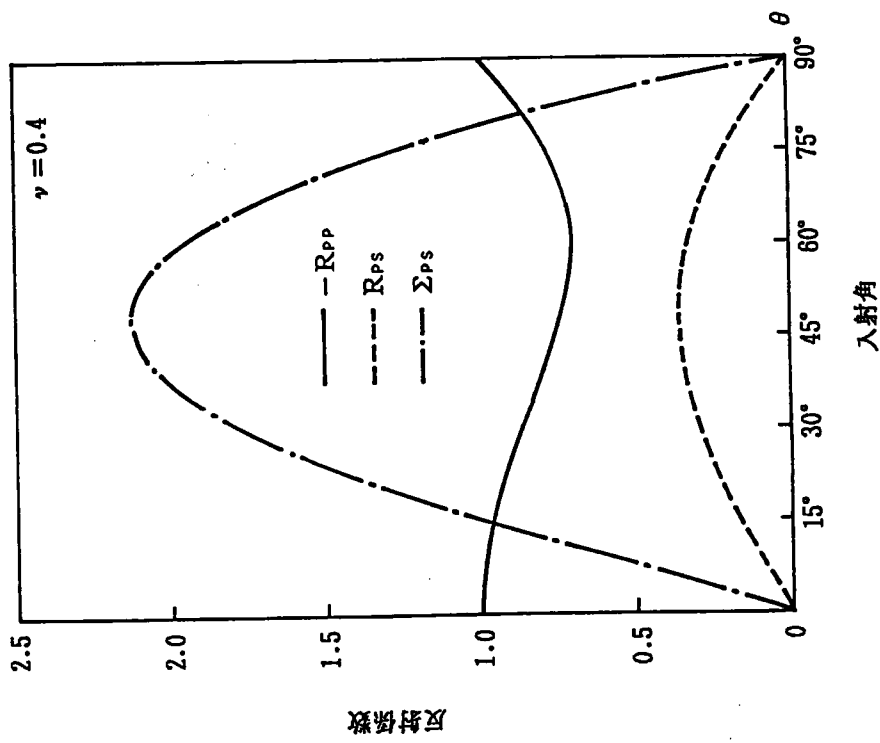


図-2.1.5 (c) P波入射に対するポテンシャルと  
最大せん断応力の反射係数  $\nu = 0.4$

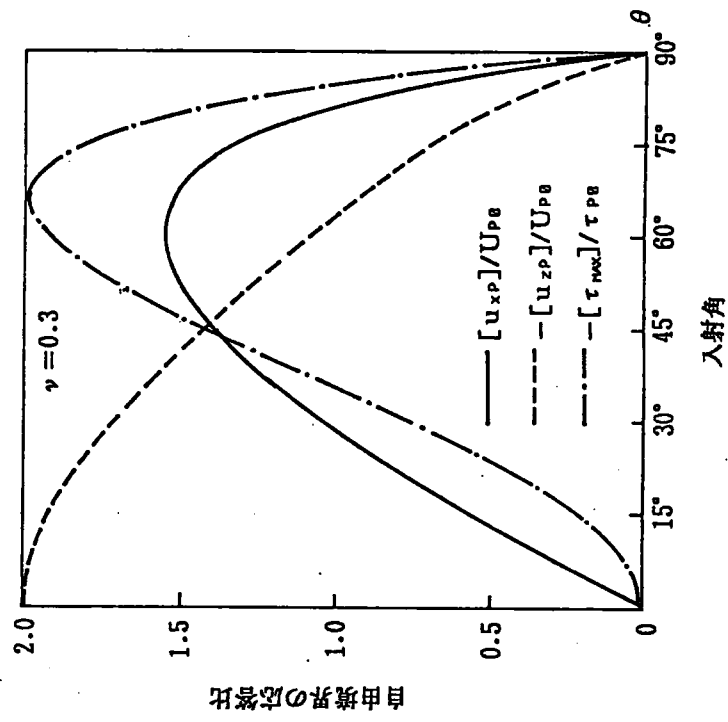


図-2.1.5 (d) P波入射に対する自由境界の応答比  
 $\nu = 0.3$

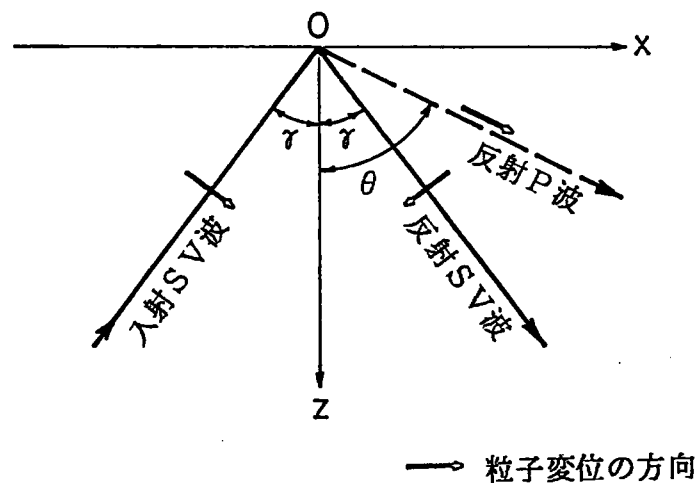


図-2.1.6 平面SV波の入射と反射波

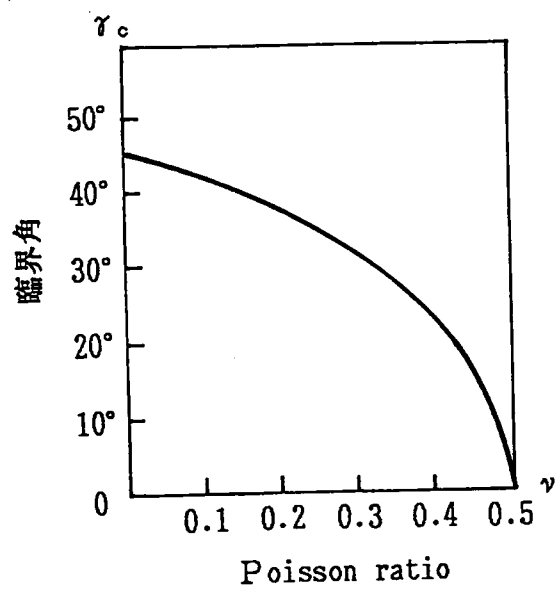


図-2.1.7 Poisson ratio と臨界角

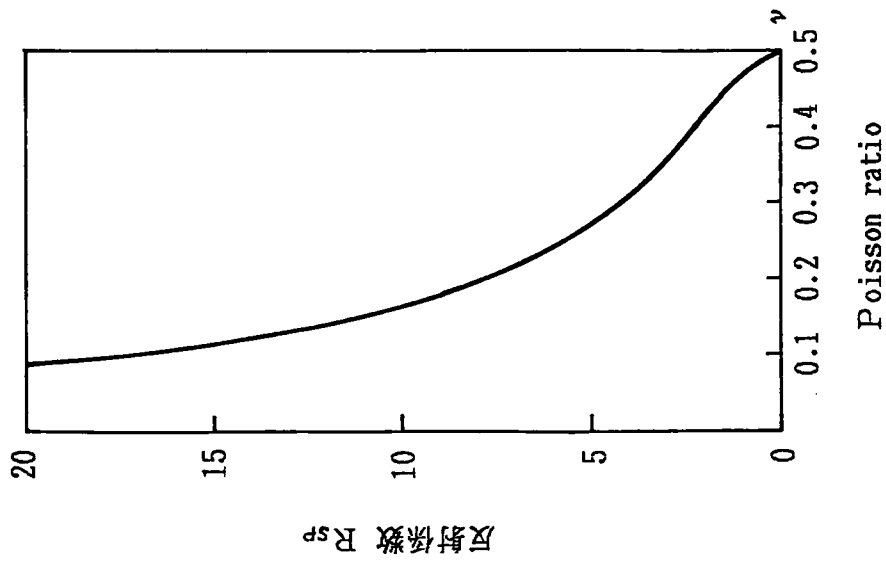


図-2.1.8  $\gamma = \gamma_c$  の場合の反射係数  $R_{sp}$

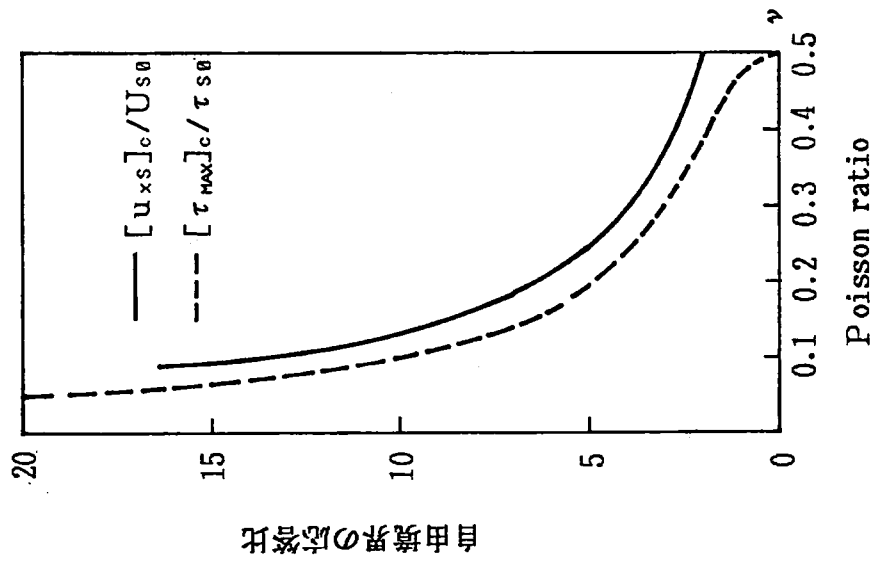
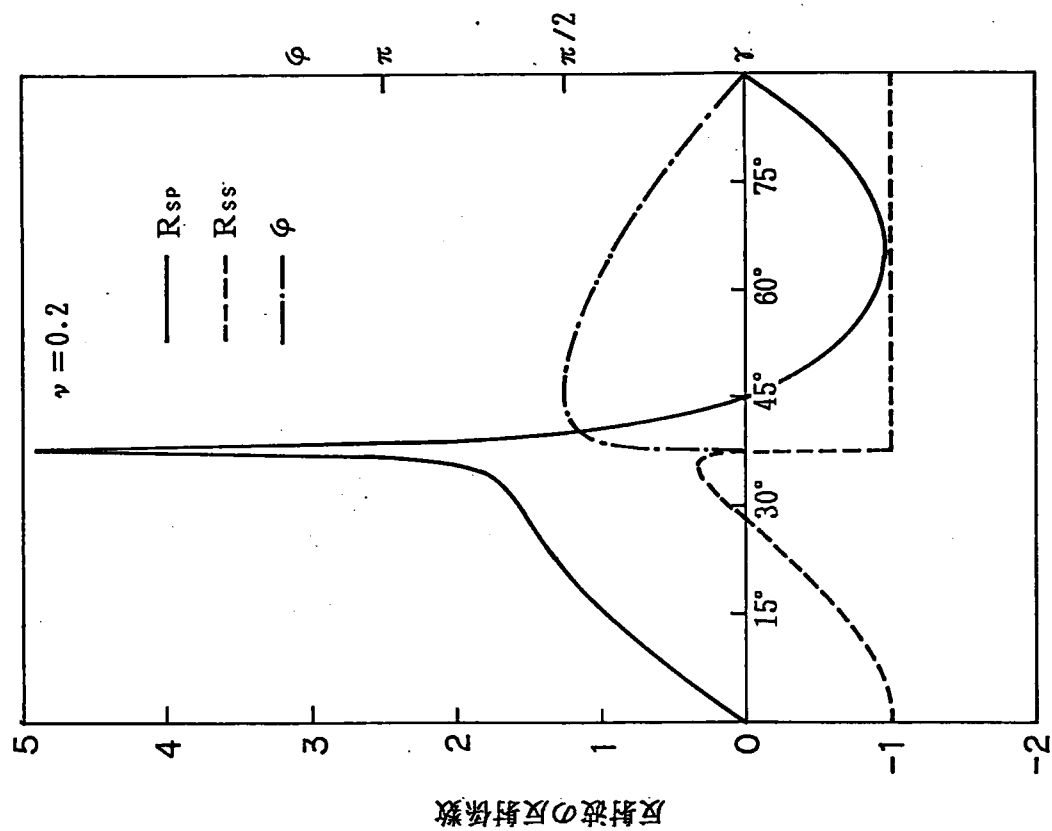
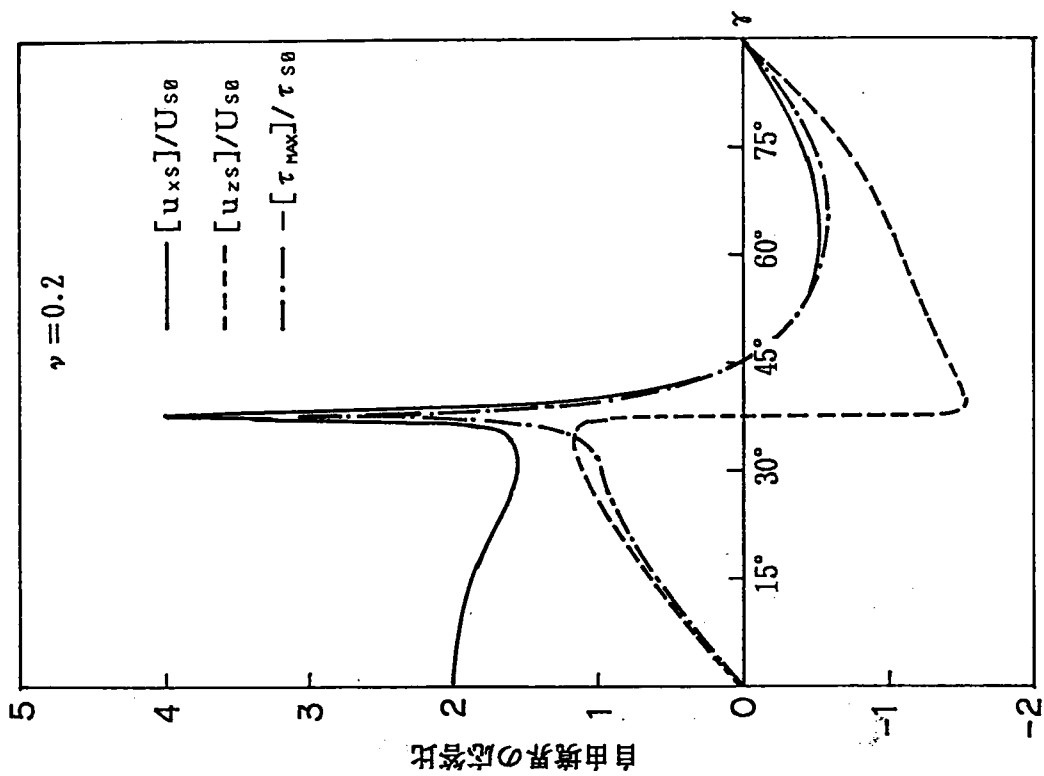


図-2.1.9  $\gamma = \gamma_c$  の場合の自由境界の応答比



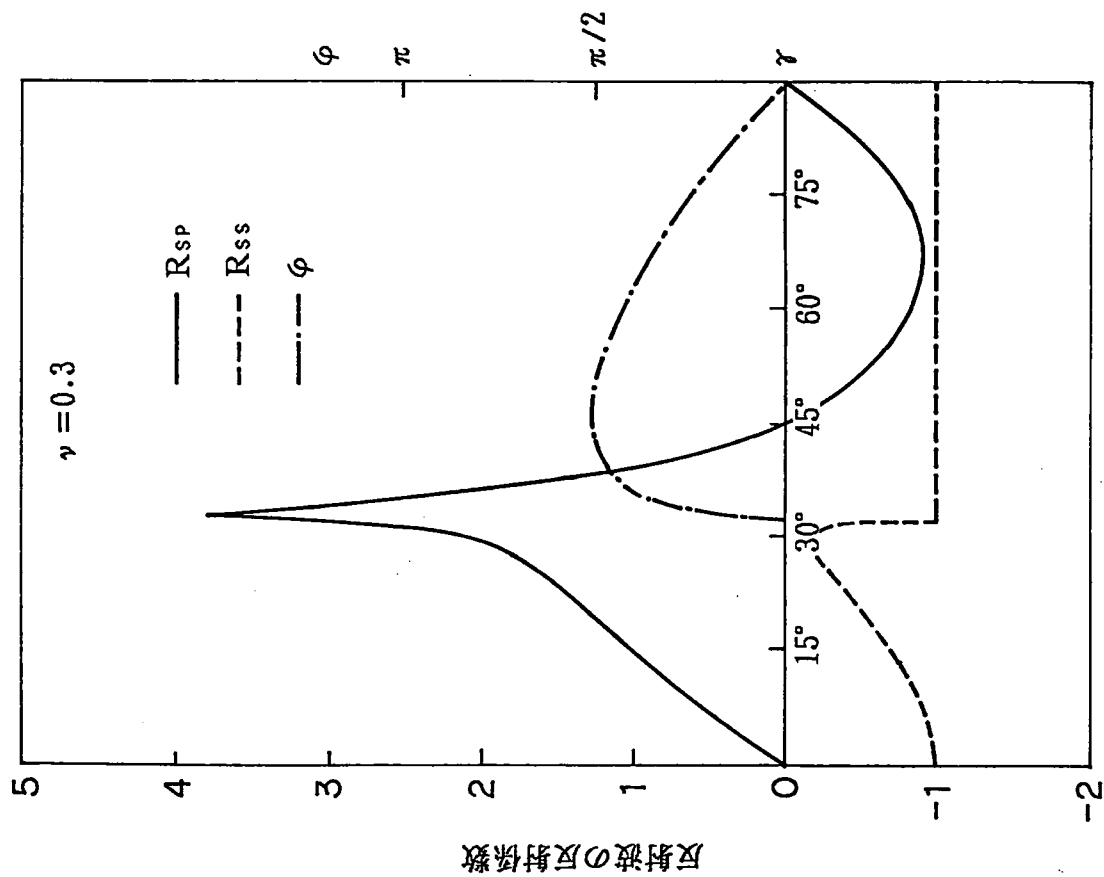
(a) ポテンシャルの反射係数と位相変化



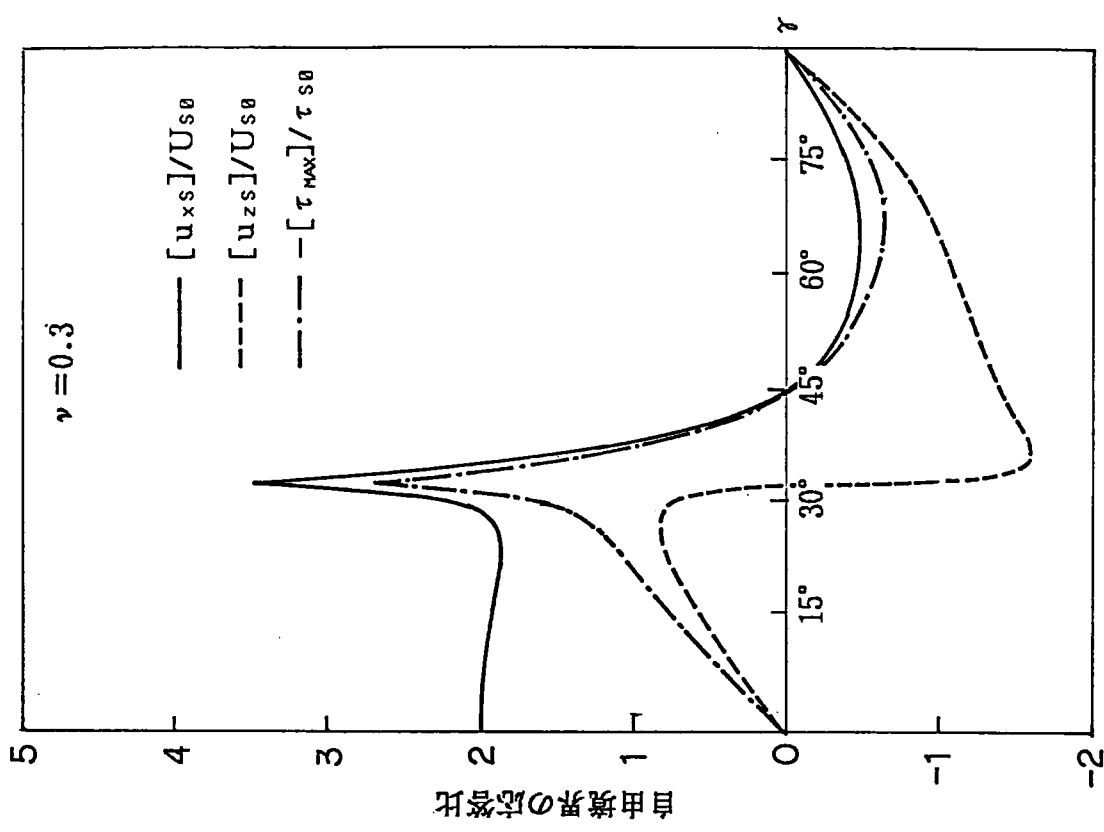
(b) 自由境界の変位と  $\tau_{\max}$  の応答比

図-2.1.10 S V 波入射に対する反射係数と自由境界の応答比  $\nu = 0.2$



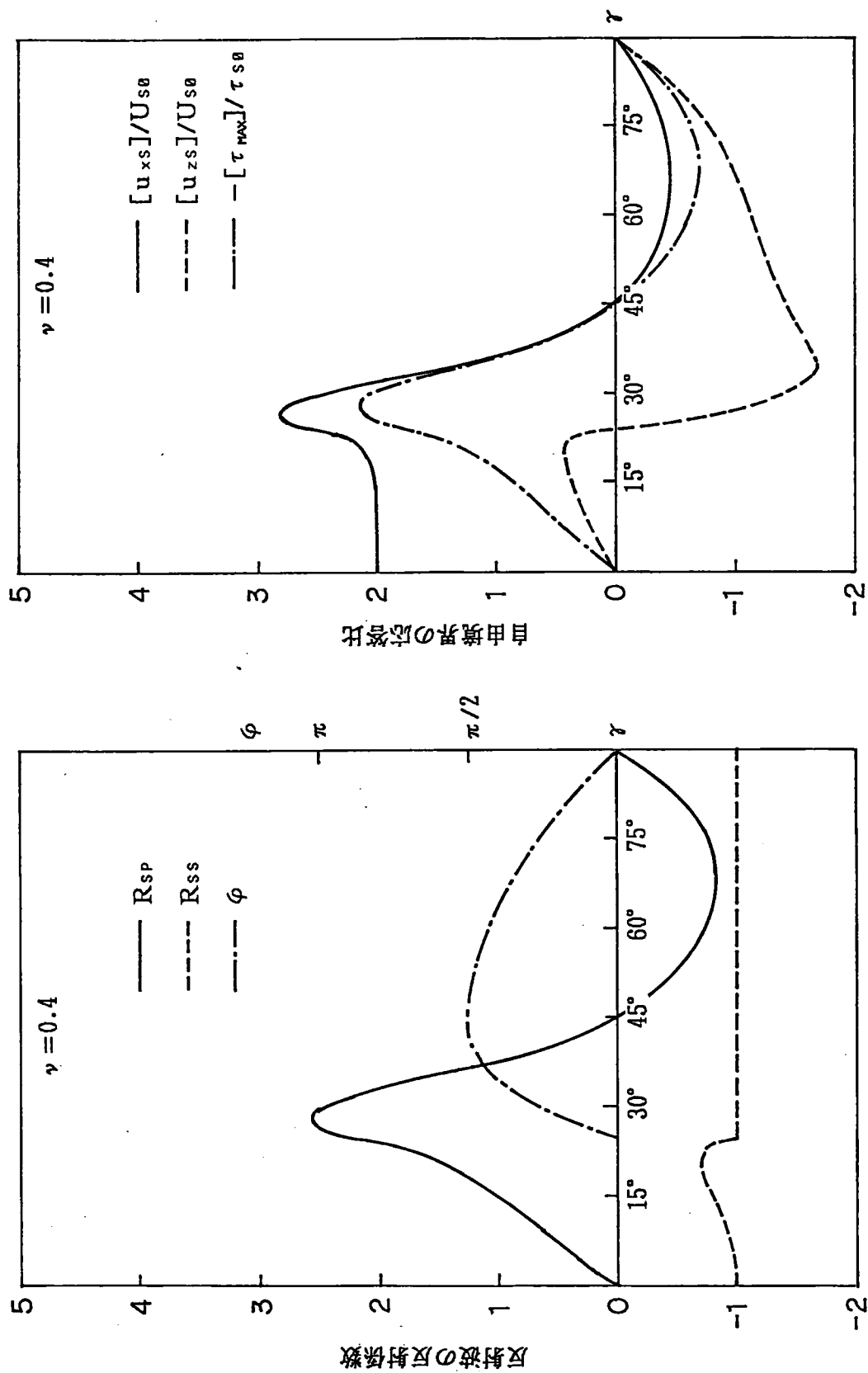


(a) ポテンシャルの反射係数と位相変化



(b) 自由境界の変位と  $\tau_{\max}$  の応答比

図-2.1.11 SV波入射に対する反射係数と自由境界の応答比  $\nu=0.3$



(a) ポテンシャルの反射係数と位相変化

(b) 自由境界の変位と  $\tau_{\max}$  の応答比

図-2.1.12 S V波入射に対する反射係数と自由境界の応答比  $\nu = 0.4$

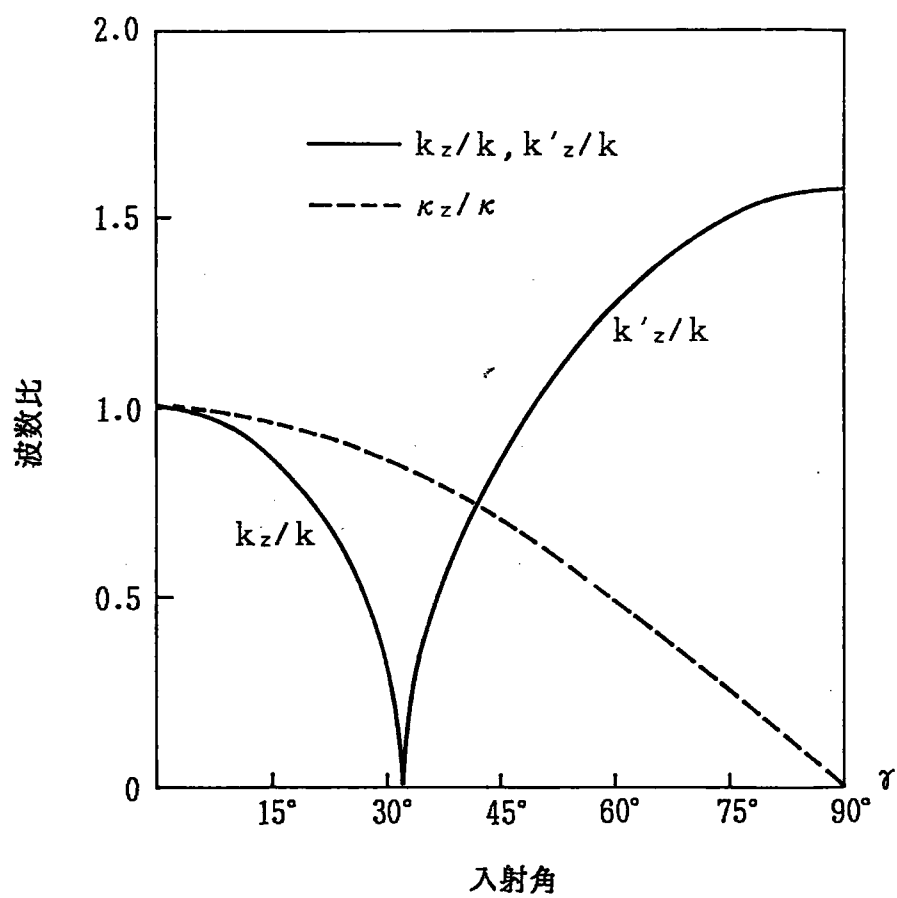
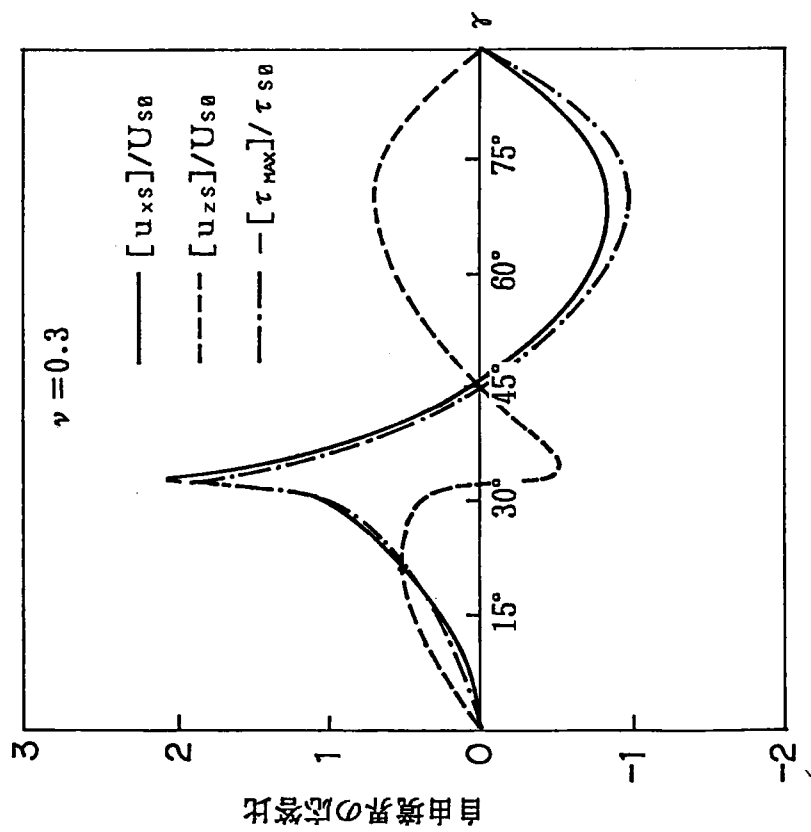
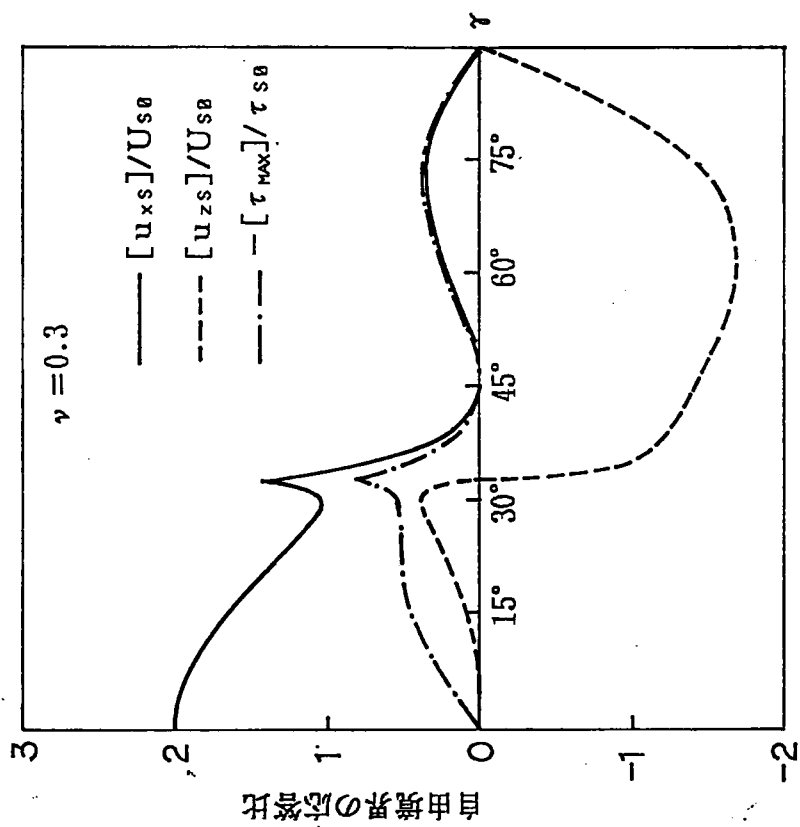


図-2.1.13 S V波が自由境界に入射する場合の波数と入射角  
 $\nu = 0.3$



(a) 反射P波のみによる寄与



(b) 入射SV波と反射SV波による寄与

図-2.1.14 SV波入射時の入射波および反射波の自由境界の応答比に対する寄与  $\nu = 0.3$

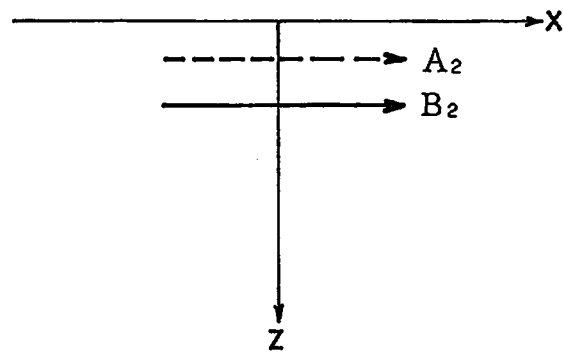


図-2.1.15 Rayleigh 波のポテンシャル

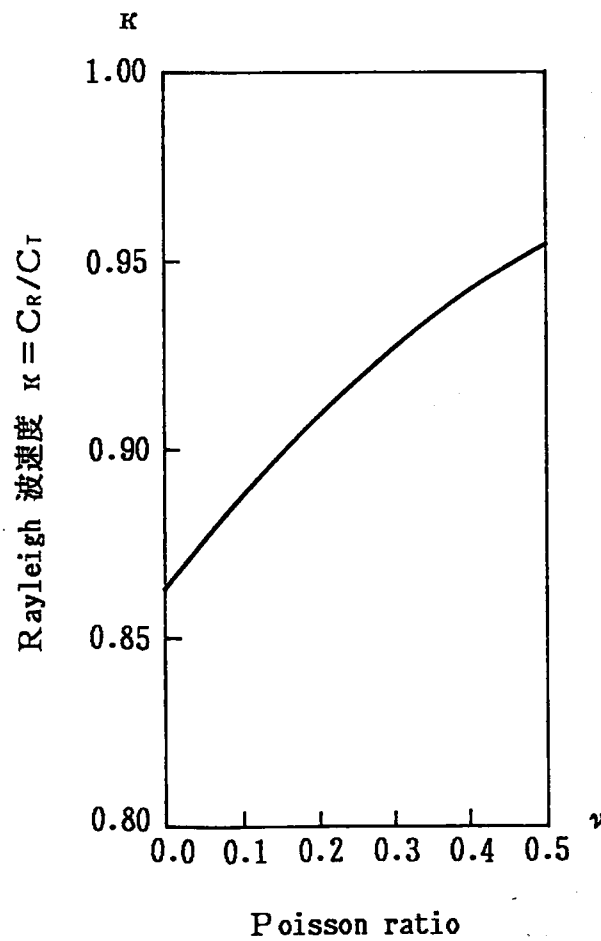


図-2.1.16 Rayleigh 波速度とPoisson ratio

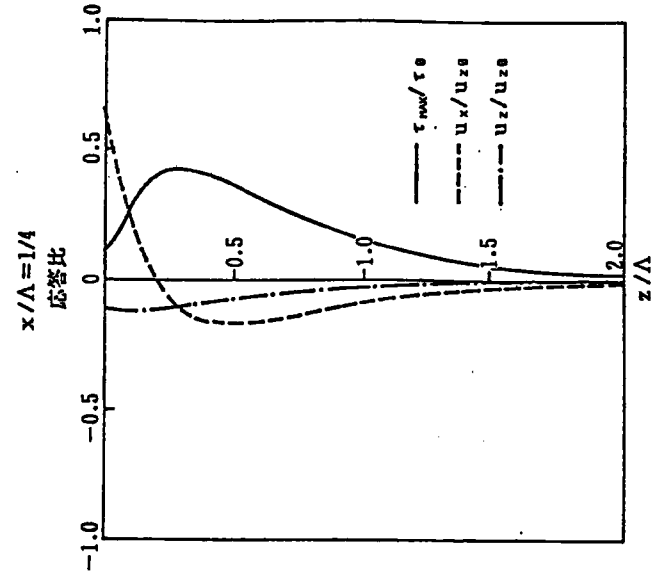
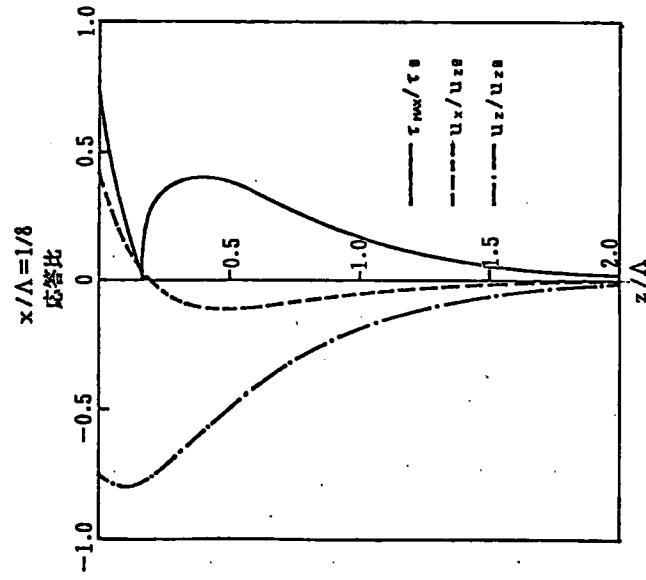
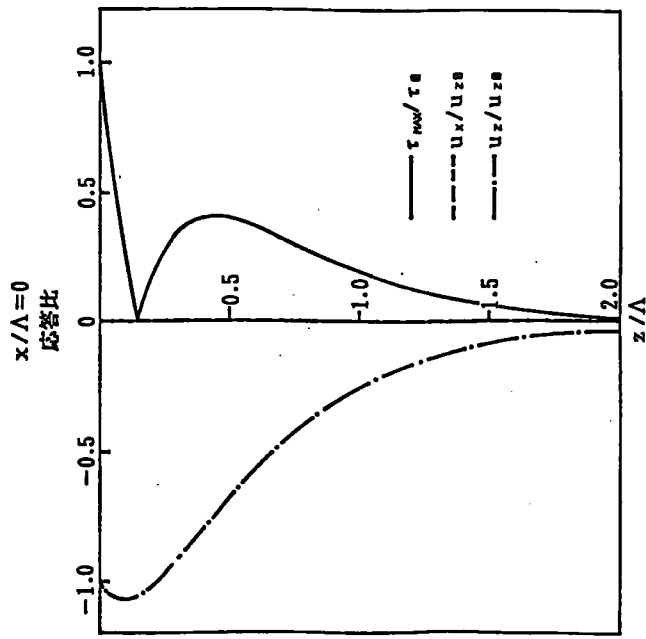


図-2.1.17(a) Rayleigh 波の変位成分と最大せん断応力の分布  
 $x/\Lambda=0, \nu=0.3$

図-2.1.17(b) Rayleigh 波の変位成分と最大せん断応力の分布  
 $x/\Lambda=1/8, \nu=0.3$

図-2.1.17(c) Rayleigh 波の変位成分と最大せん断応力の分布  
 $x/\Lambda=1/4, \nu=0.3$

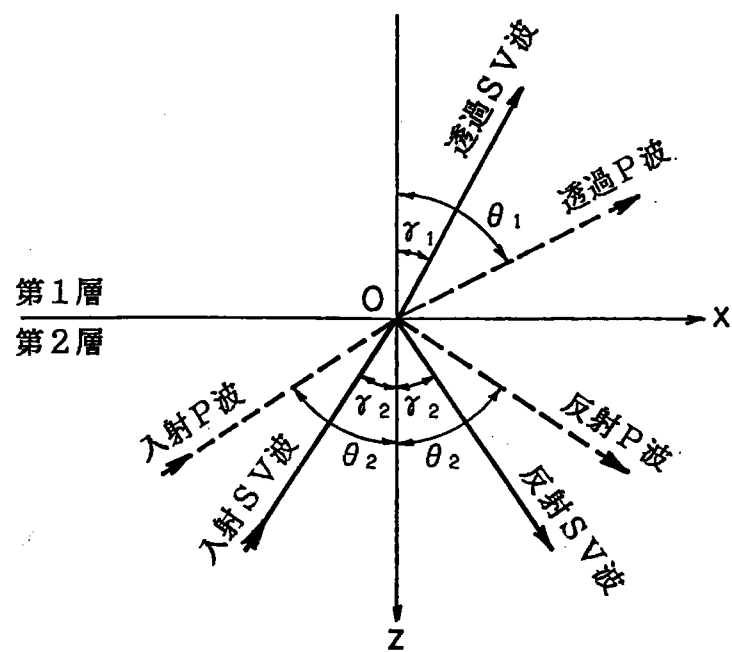


図-2.2.1 接合境界における反射波と透過波

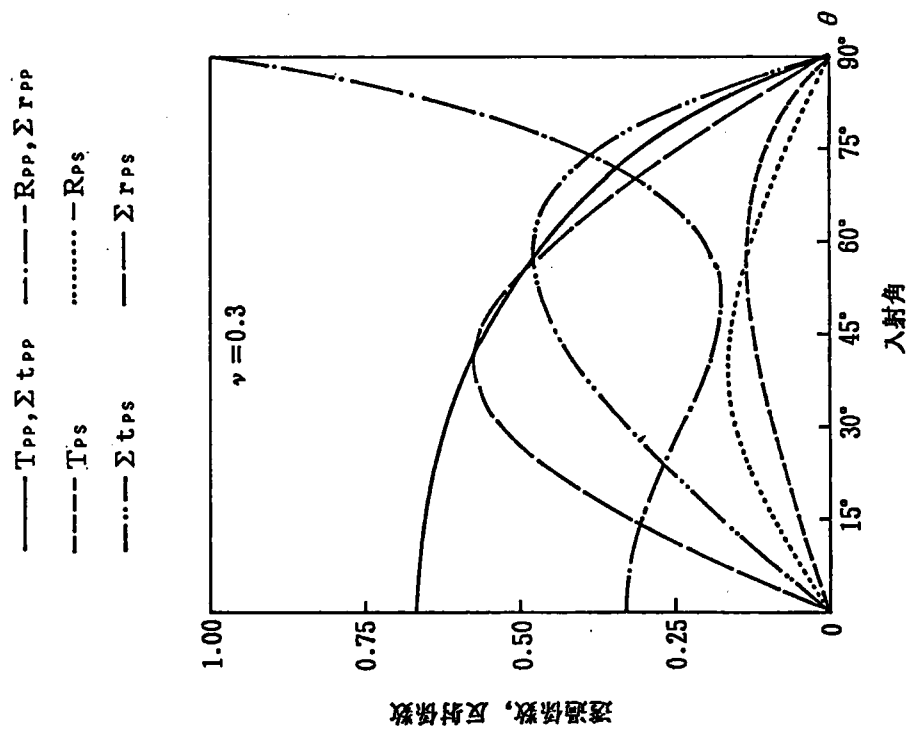


図-2.2.2 (a) 境界へP波が入射する場合のポテンシャルおよび最大せん断応力の透過係数と反射係数  $\nu = 0.3$

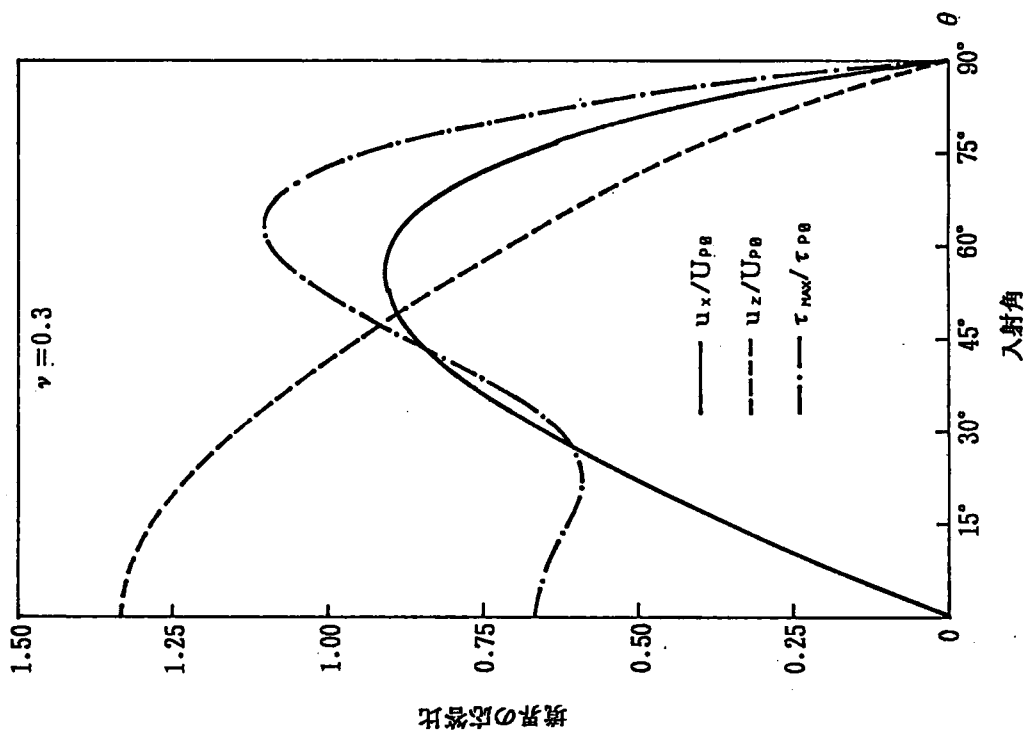


図-2.2.2 (b) 境界へP波が入射する場合の境界の変位と最大せん断応力の応答比  $\nu = 0.3$



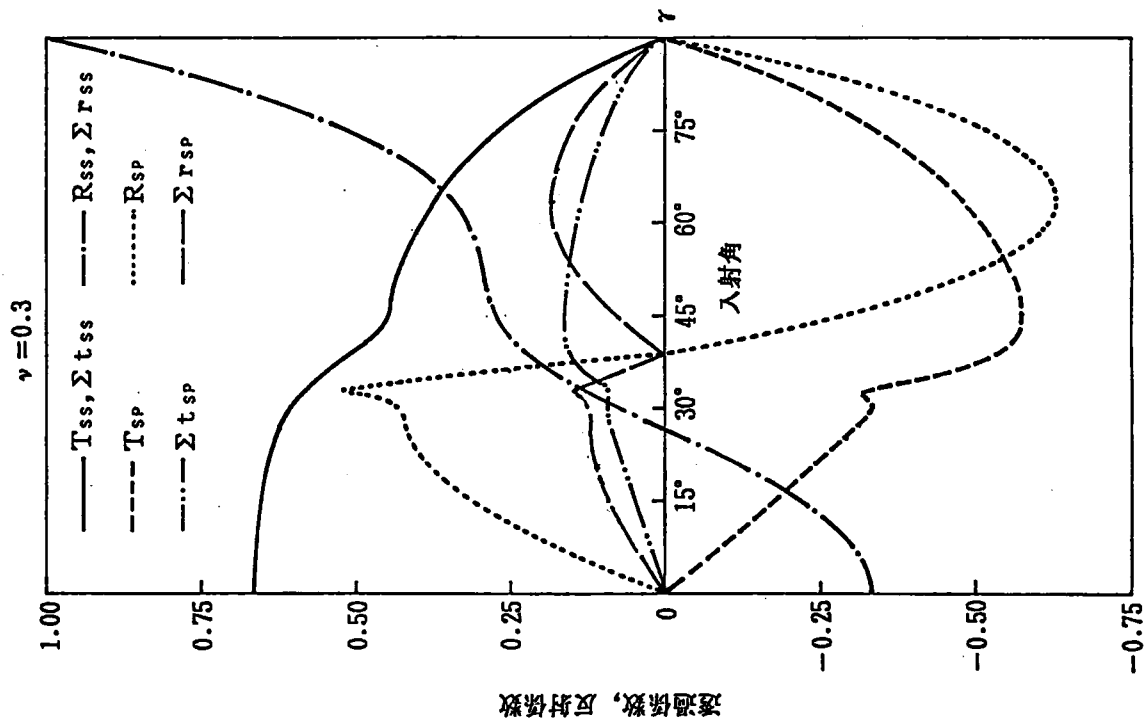


図-2.2.2.3 (a) 境界へSV波が入射する場合のポテンシャルおよび最大せん断応力の透過係数と反射係数  $\nu = 0.3$

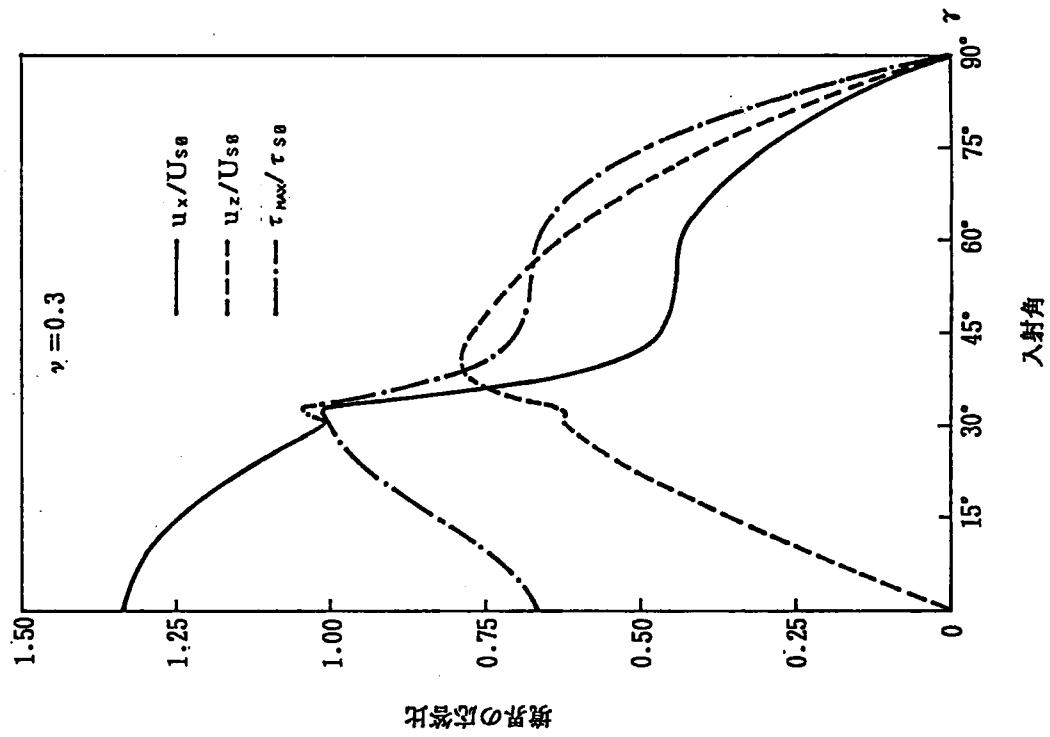


図-2.2.2.3 (b) 境界へSV波が入射する場合の境界の変位と最大せん断応力の応答比  $\nu = 0.3$

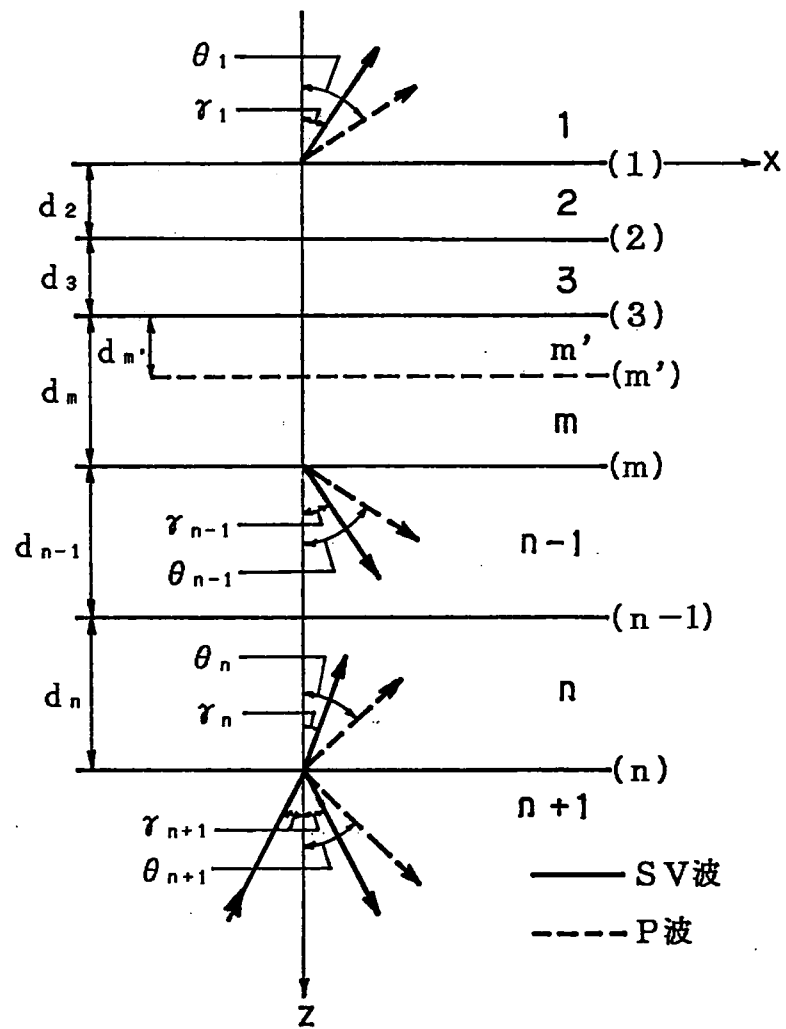


図-2.2.4 平行多層問題の層と境界

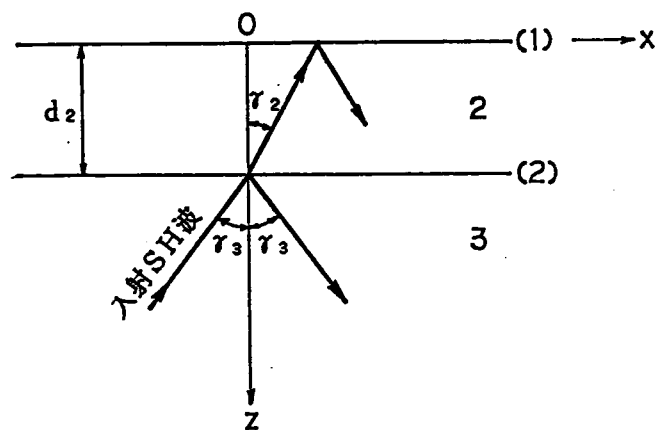


図-2.2.5 SH波が入射する自由境界を持つ2層問題

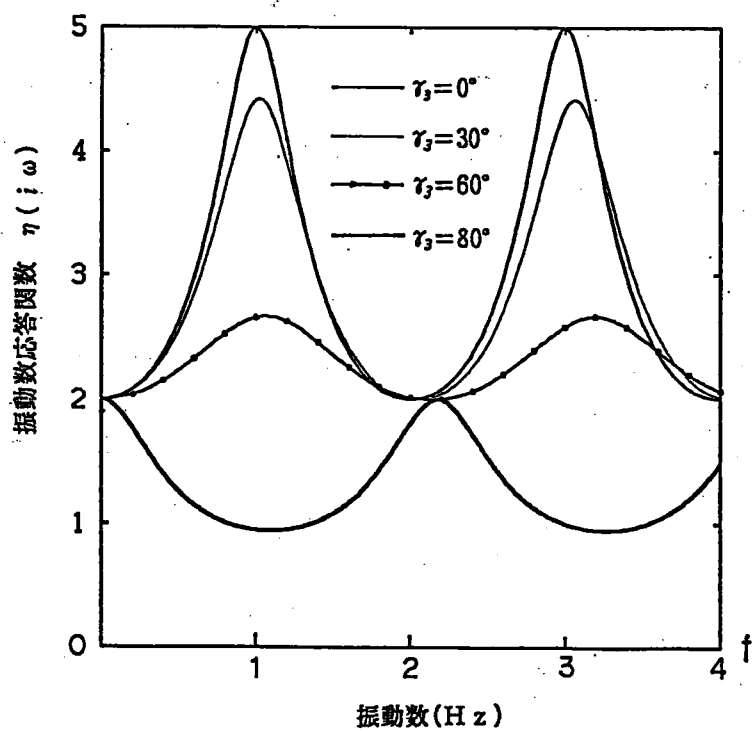
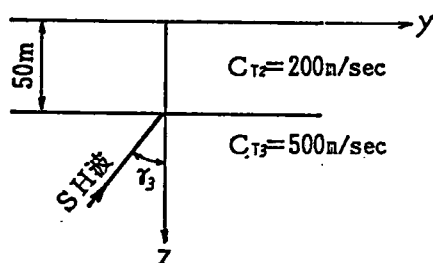


図-2.2.6 2層モデルSH1の自由境界の  
振動数応答関数  $\eta(i\omega)$

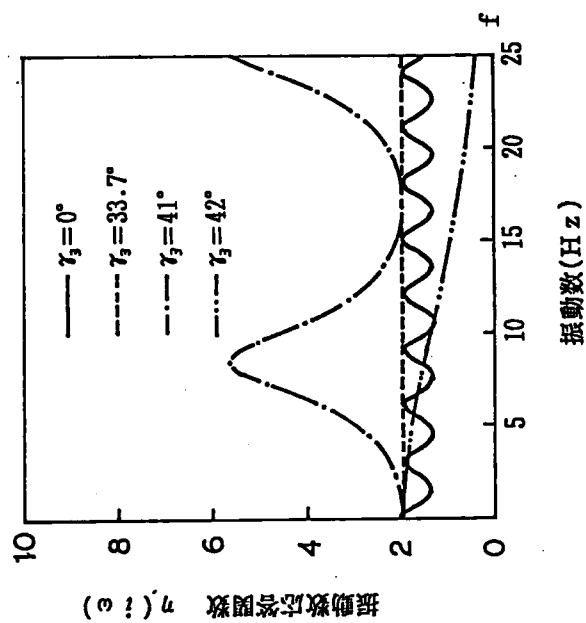
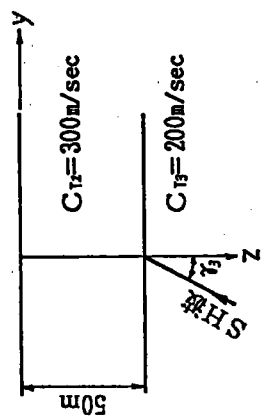


図-2.2.7 (a) 2層モデルSH2の自由境界の  
振動数応答関数  $\eta(i\omega)$

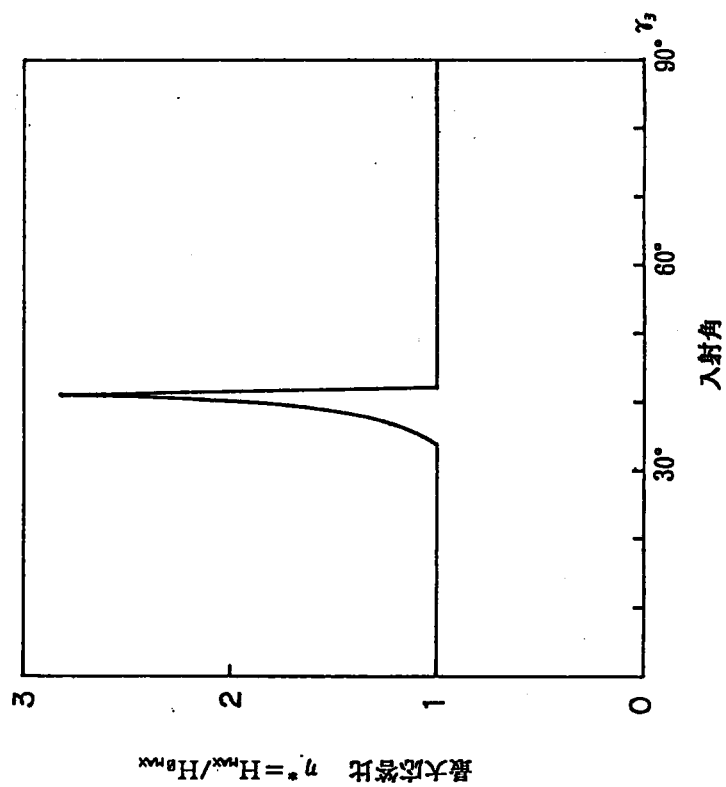


図-2.2.7 (b) 2層モデルSH2の自由境界の  
最大応答比  $\eta^*$   $\gamma_c = 41.8^\circ$

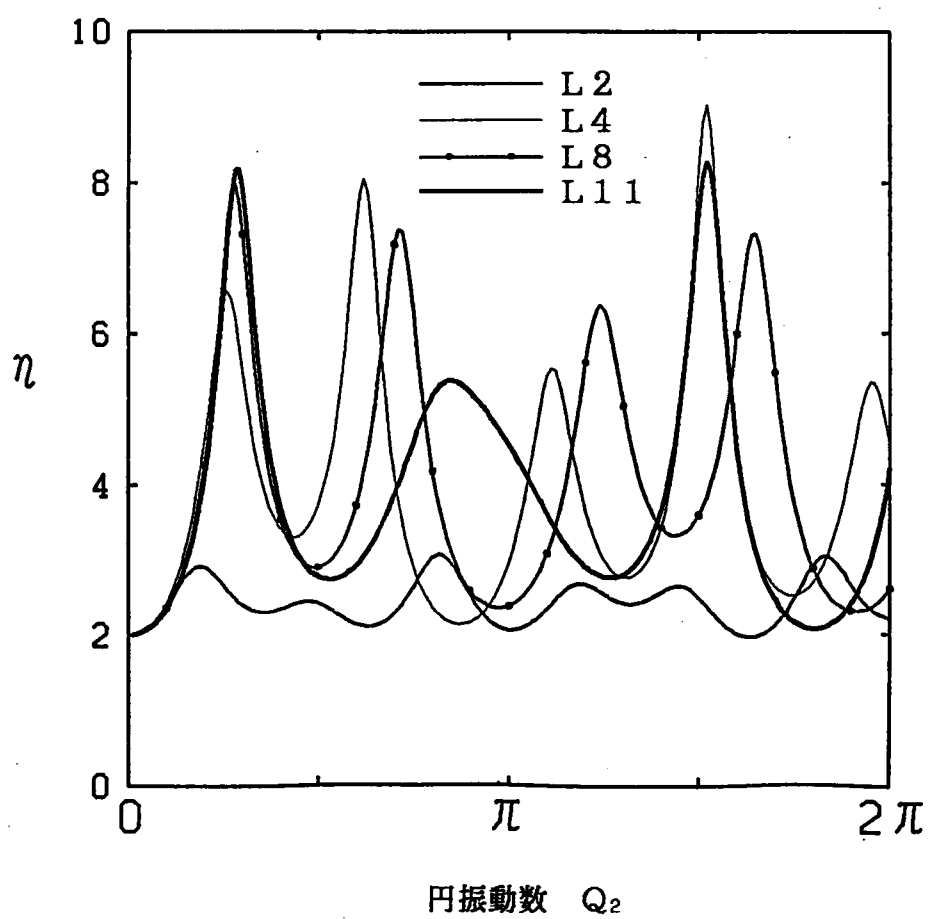


図-2.3.1 L地盤系にS波が垂直入射する場合の  
地表の振動数応答関数

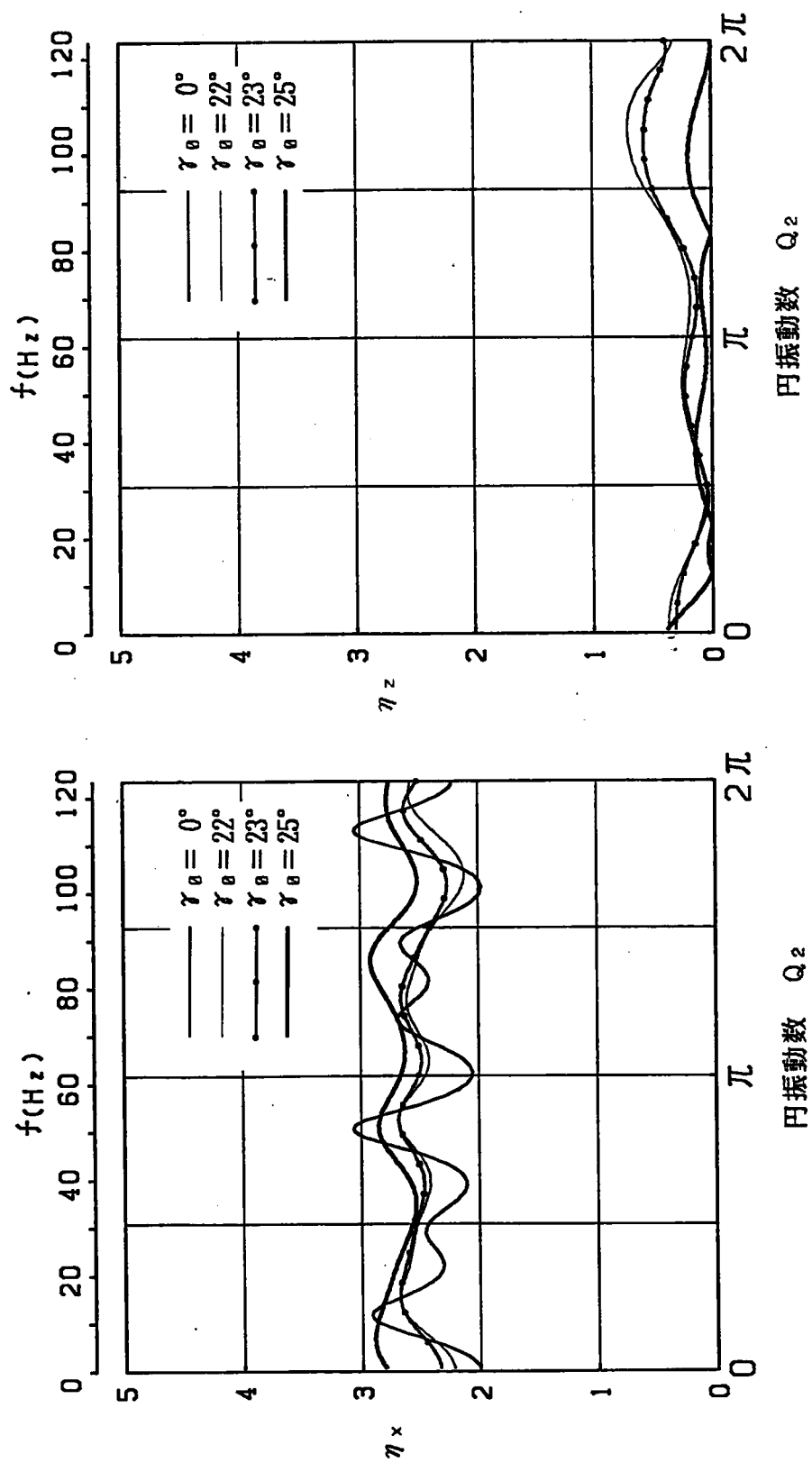


図-2.3.2 地盤L2の地表の振動数応答関数

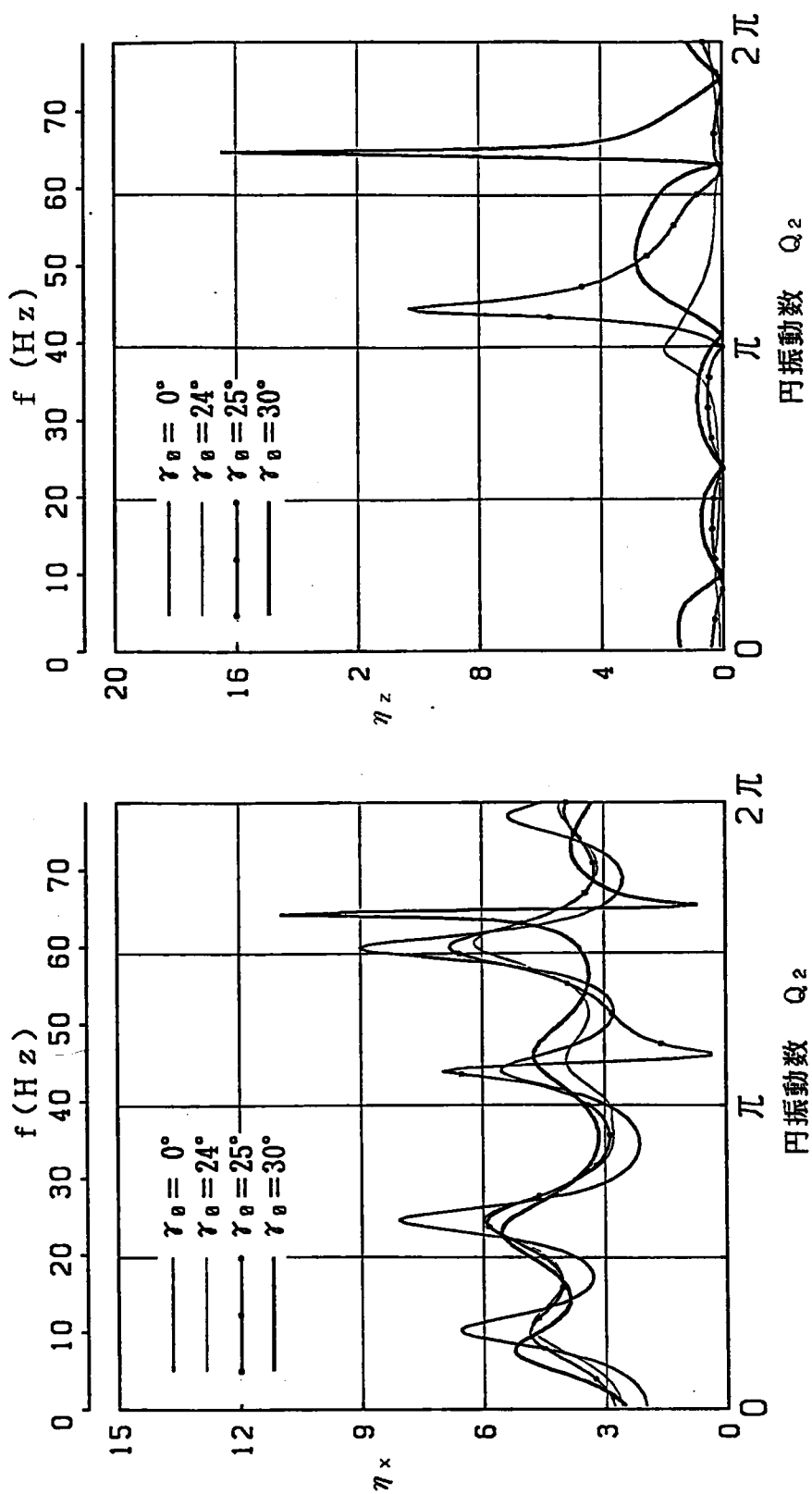


図-2.3.3 地盤 L 4 の地表の振動数応答関数

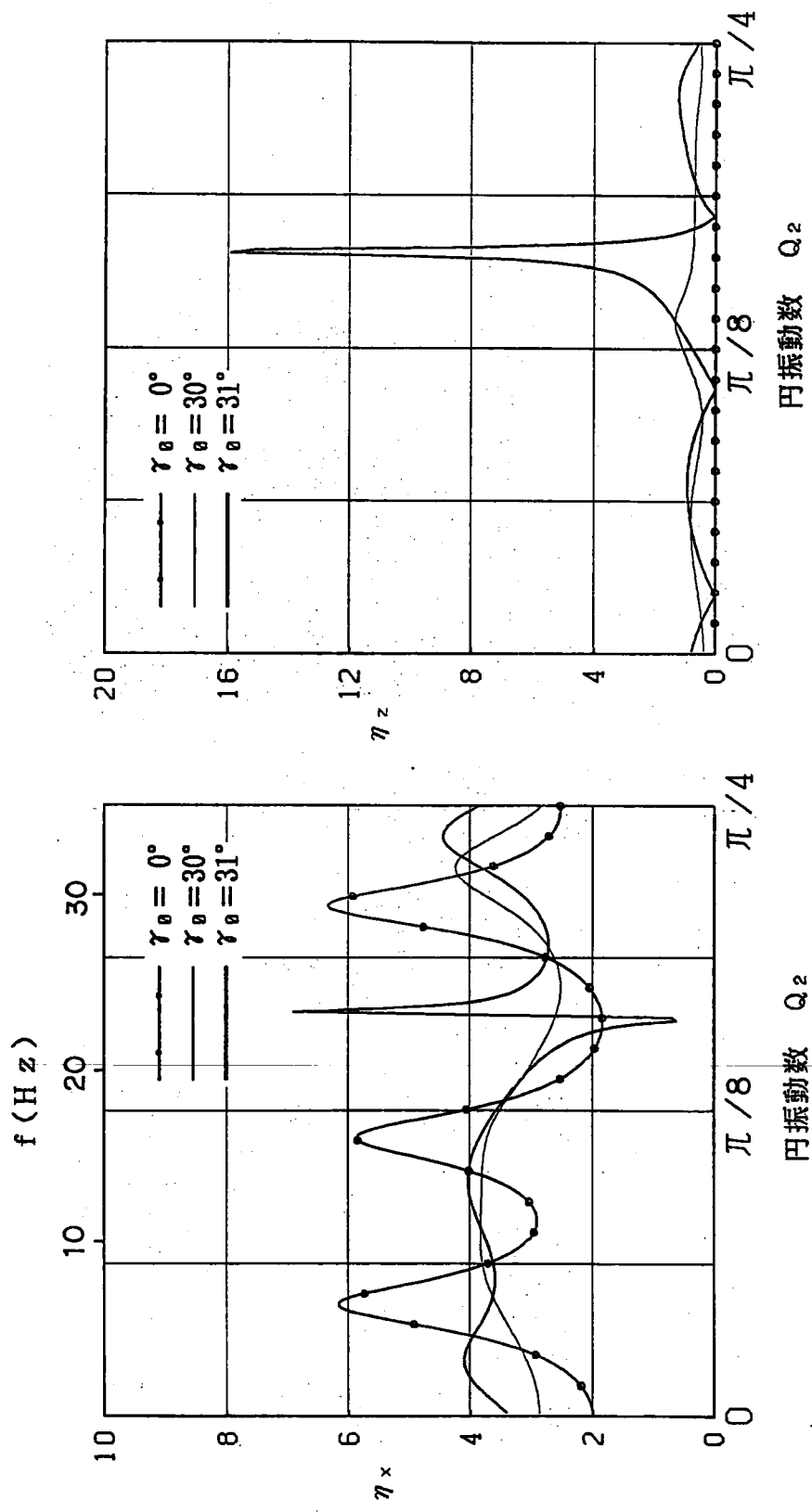


図-2.3.4 地盤H9の地表の振動数応答関数



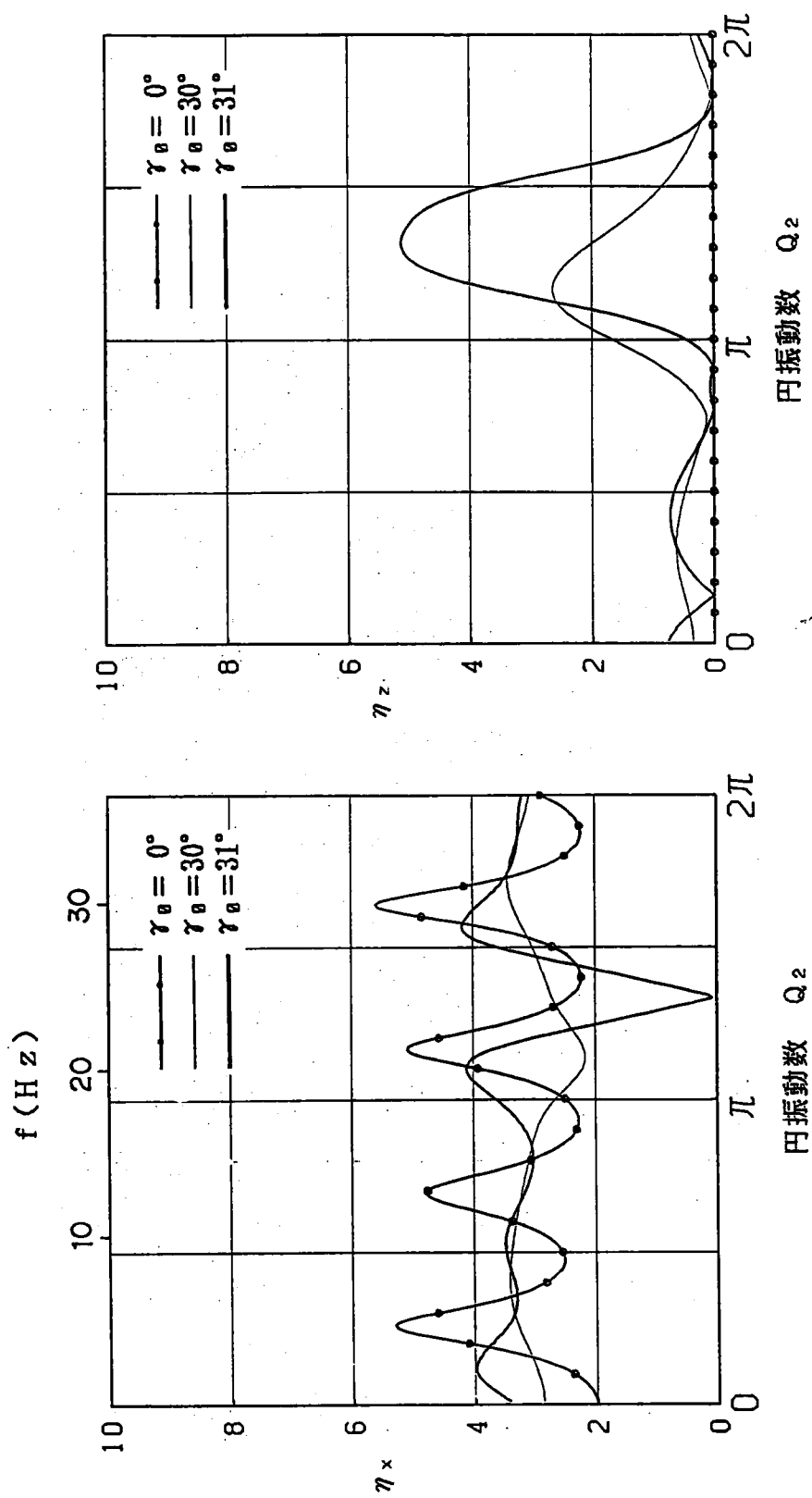


図-2.3.5 地盤H12の地表の振動数応答関数

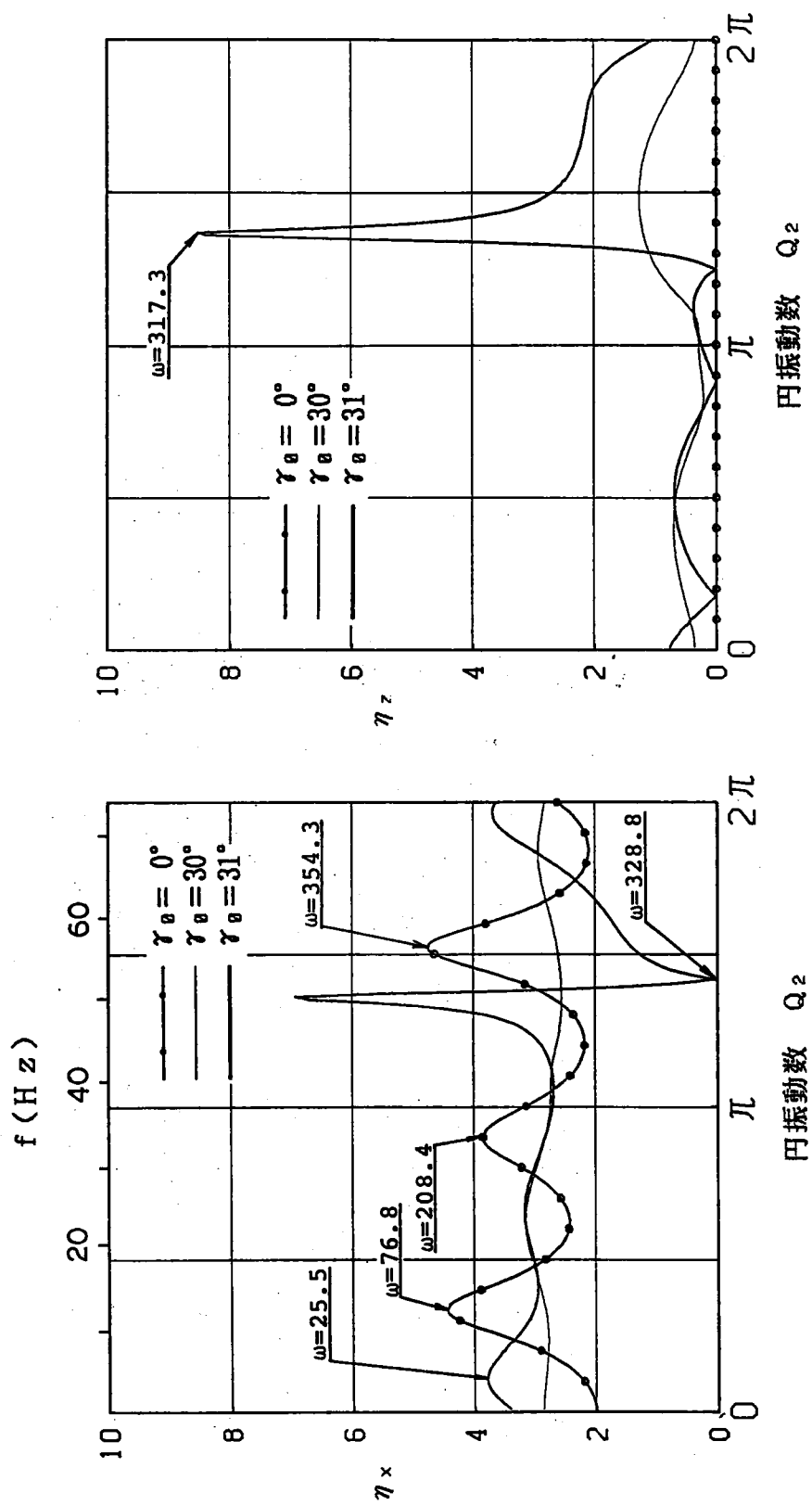


図-2.3.6 地盤H20の地表の振動数応答関数

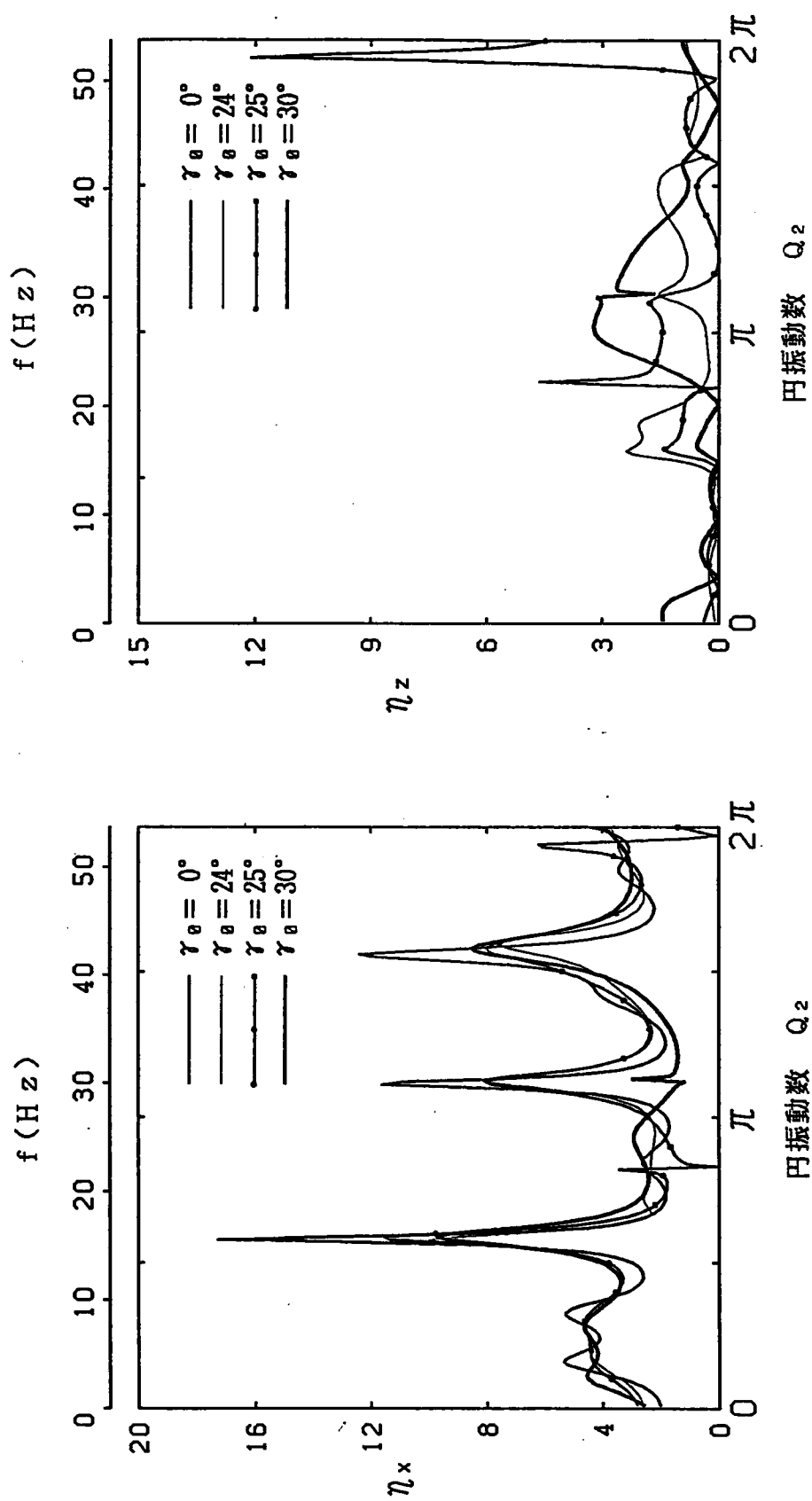


図-2.3.7 地盤 L 6 の地表の振動数応答関数

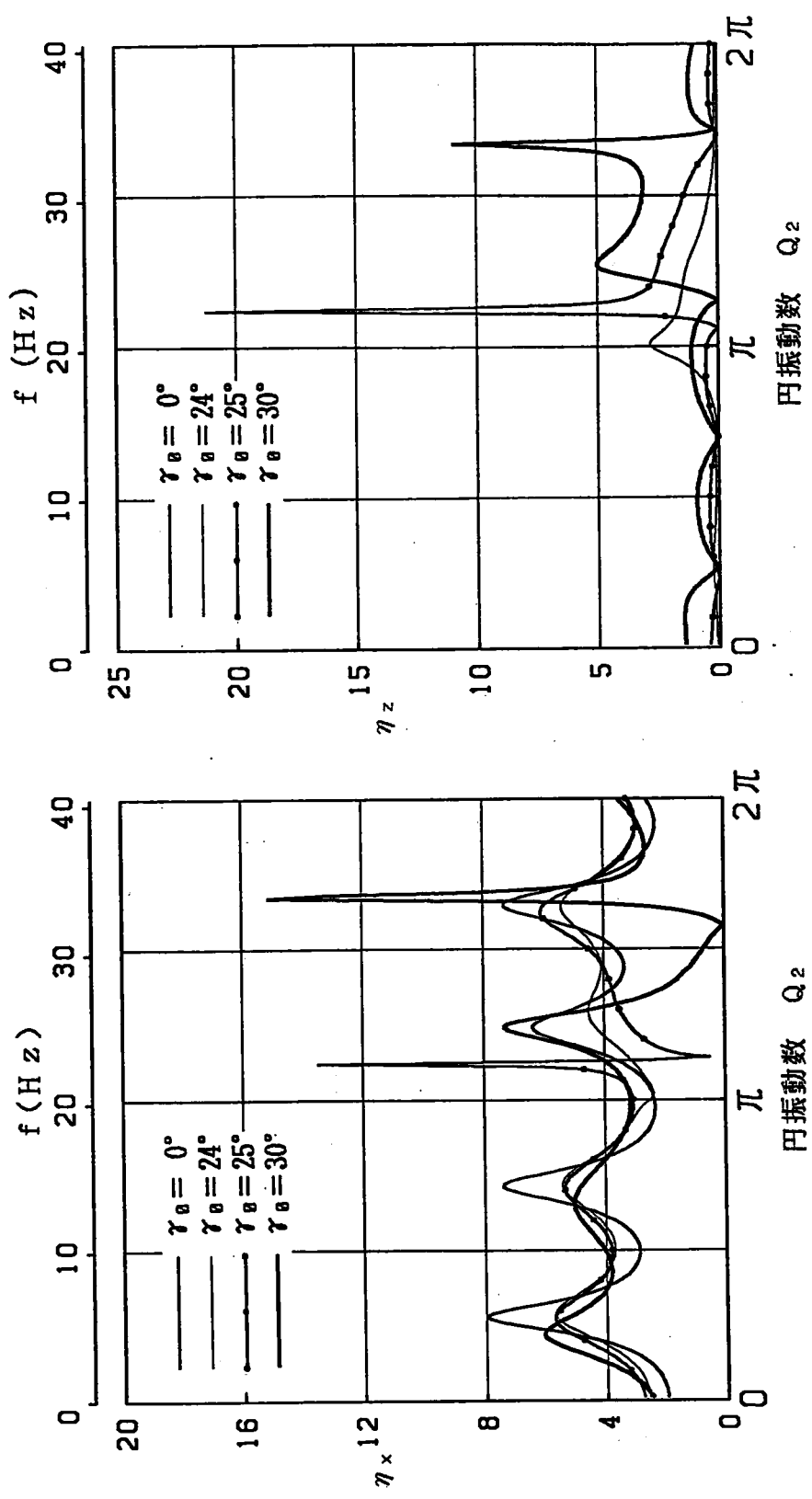


図-2.3.8 地盤L8の地表の振動数応答関数

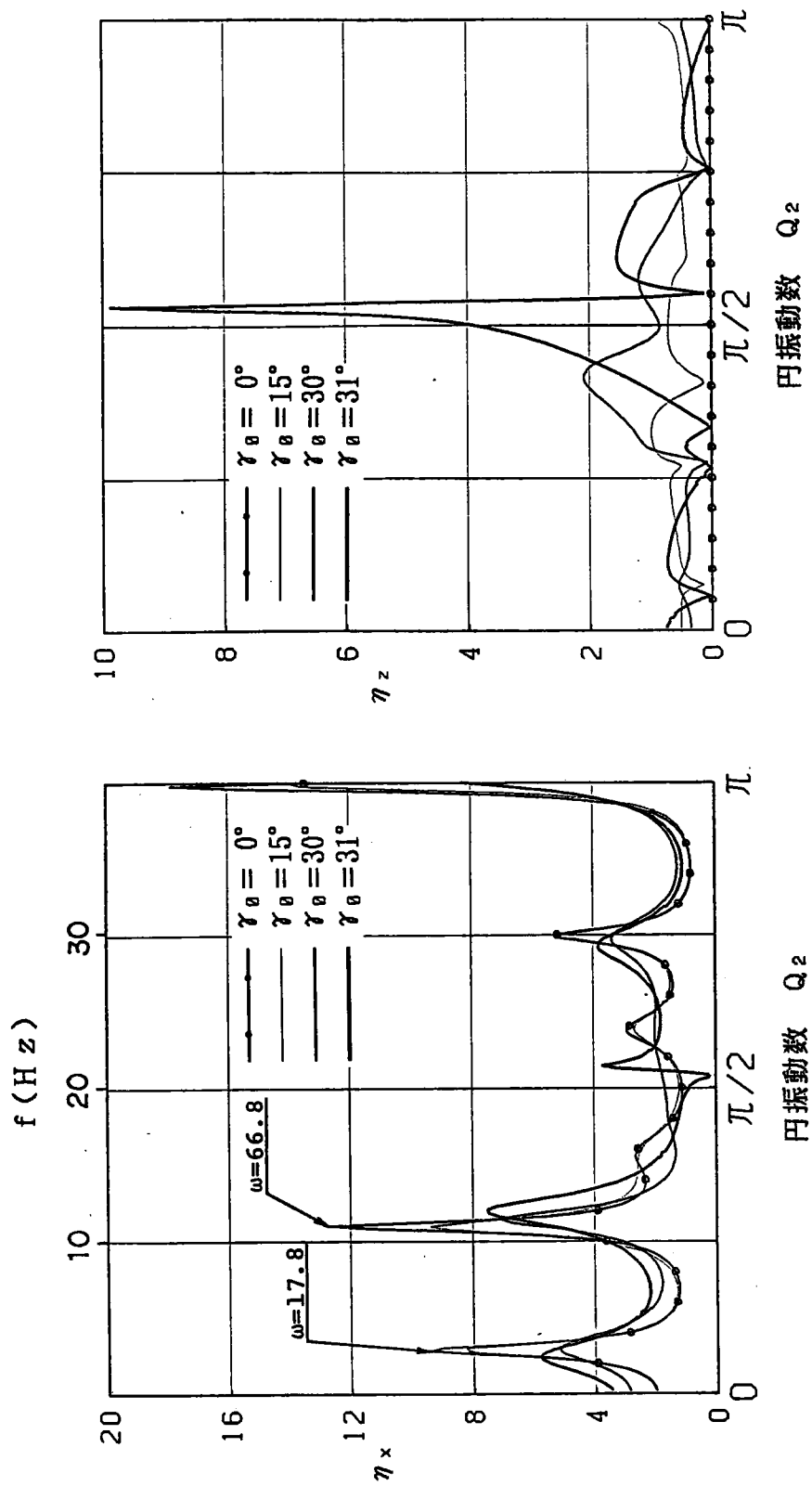


図-2.3.9 地盤H21の地表の振動数応答関数

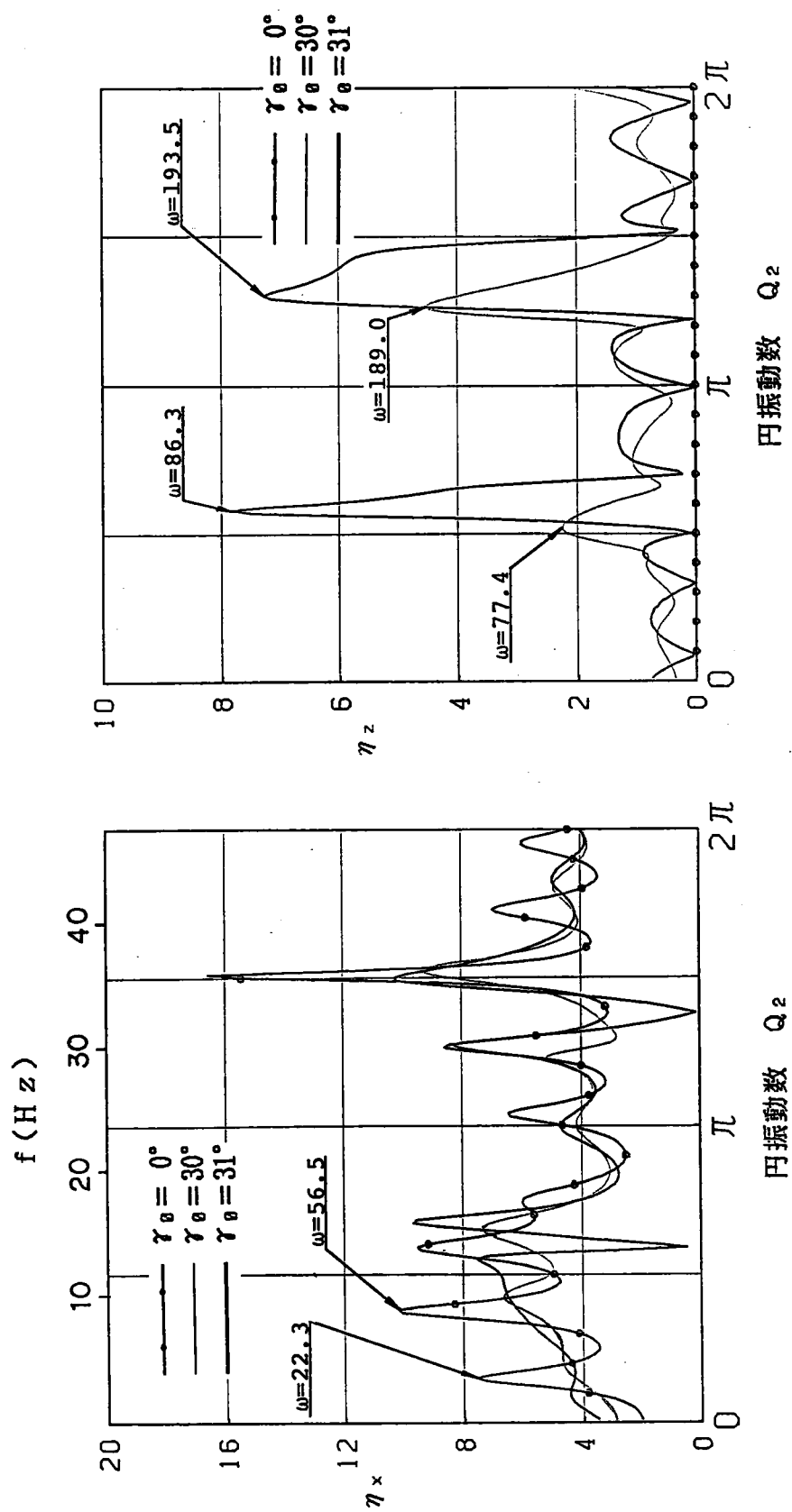


図-2.3.10 地盤H48の地表の振動数応答関数

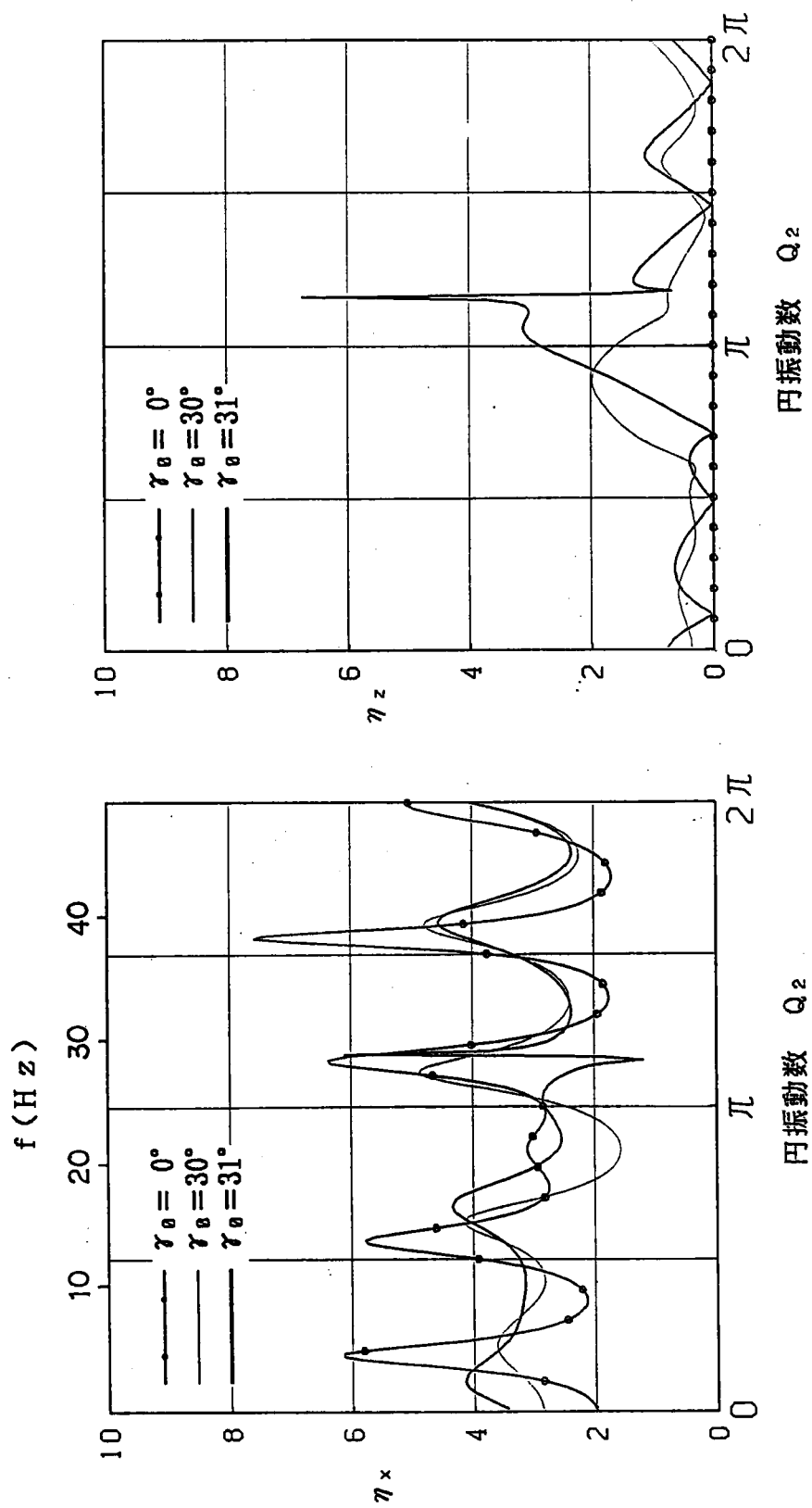


図-2.3.11 地盤H56の地表の振動数応答関数

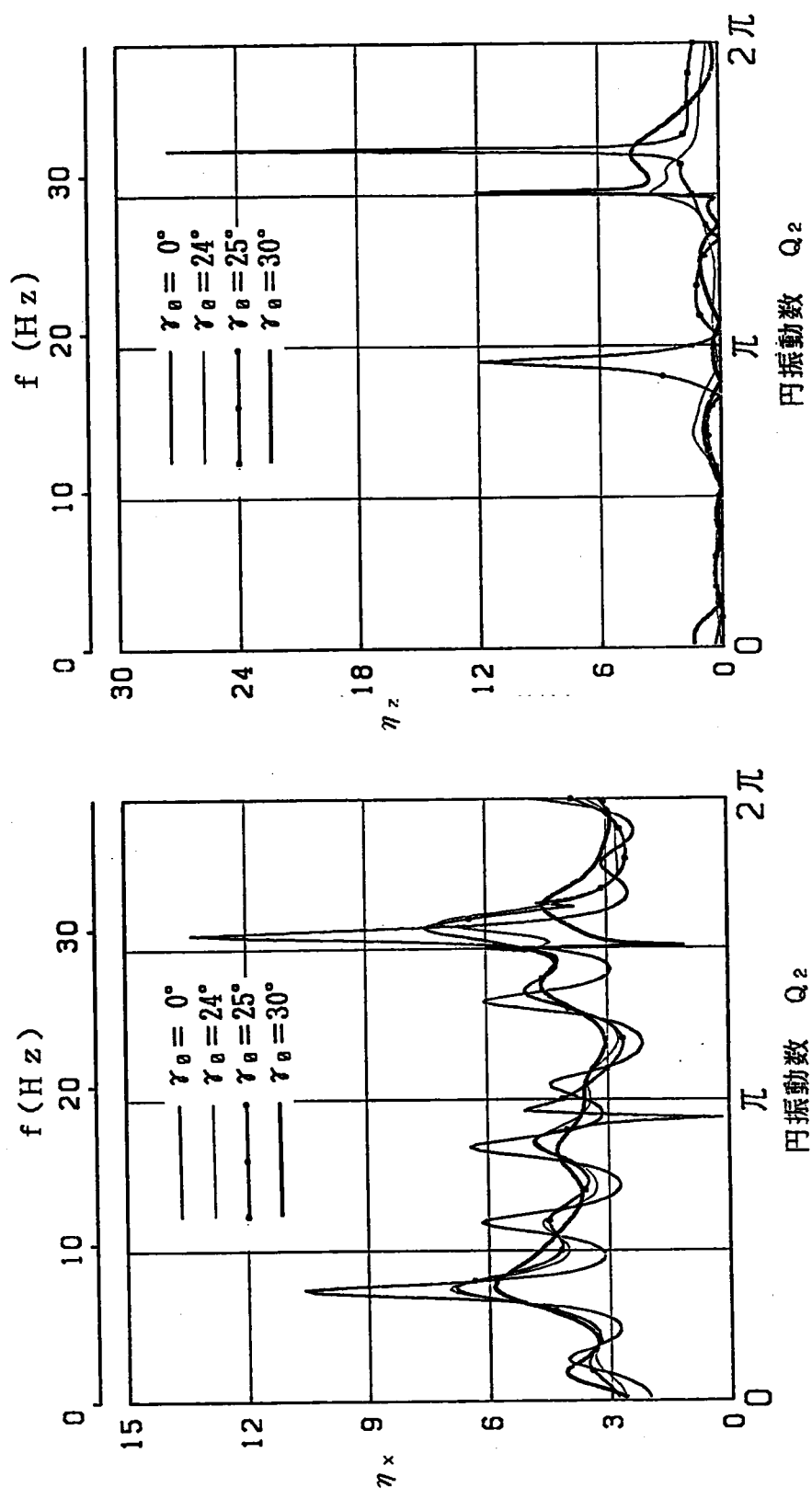


図-2.3.12 地盤L9の地表の振動数応答関数



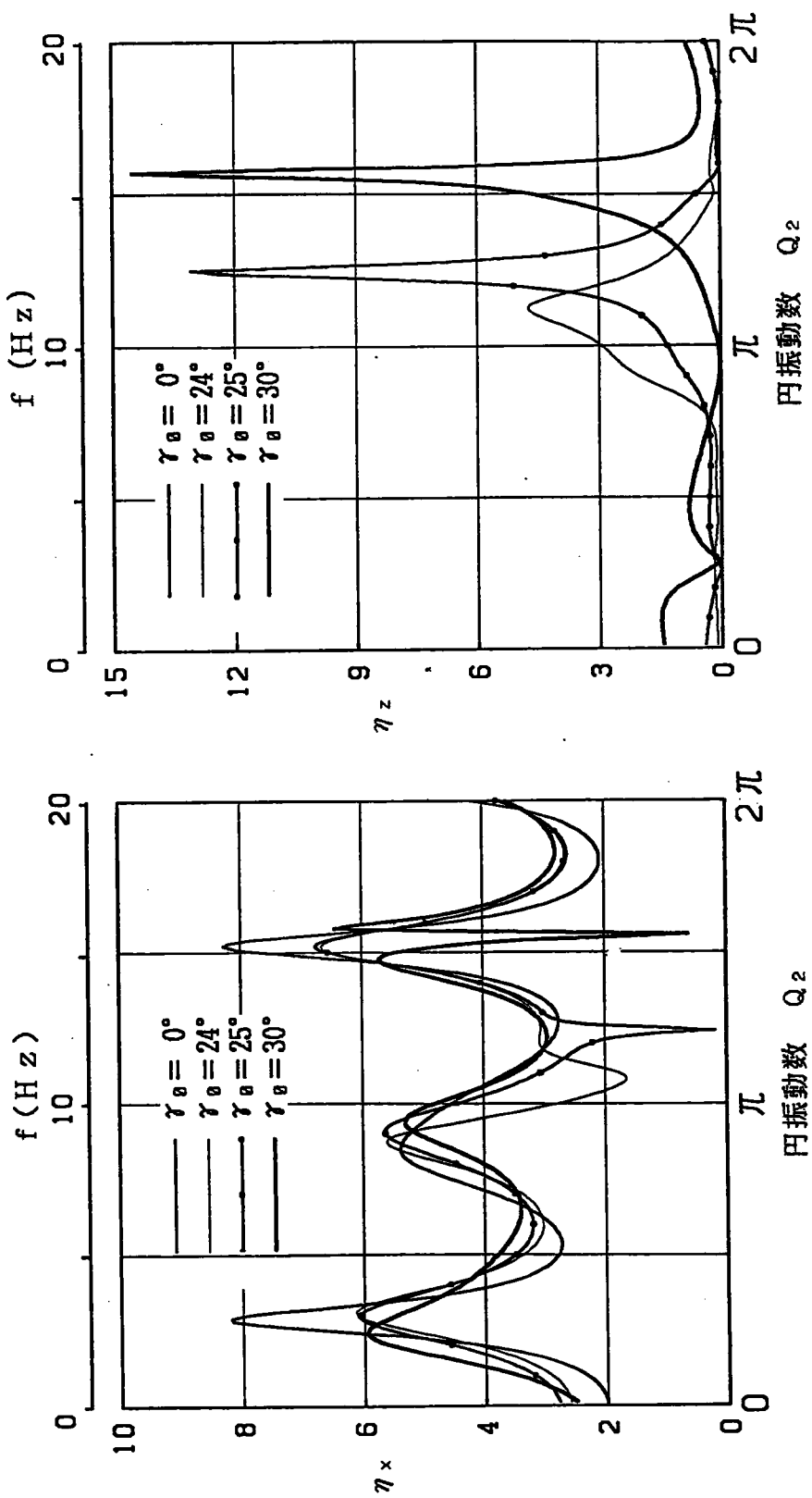


図-2.3.13 地盤L11の地表の振動数応答関数

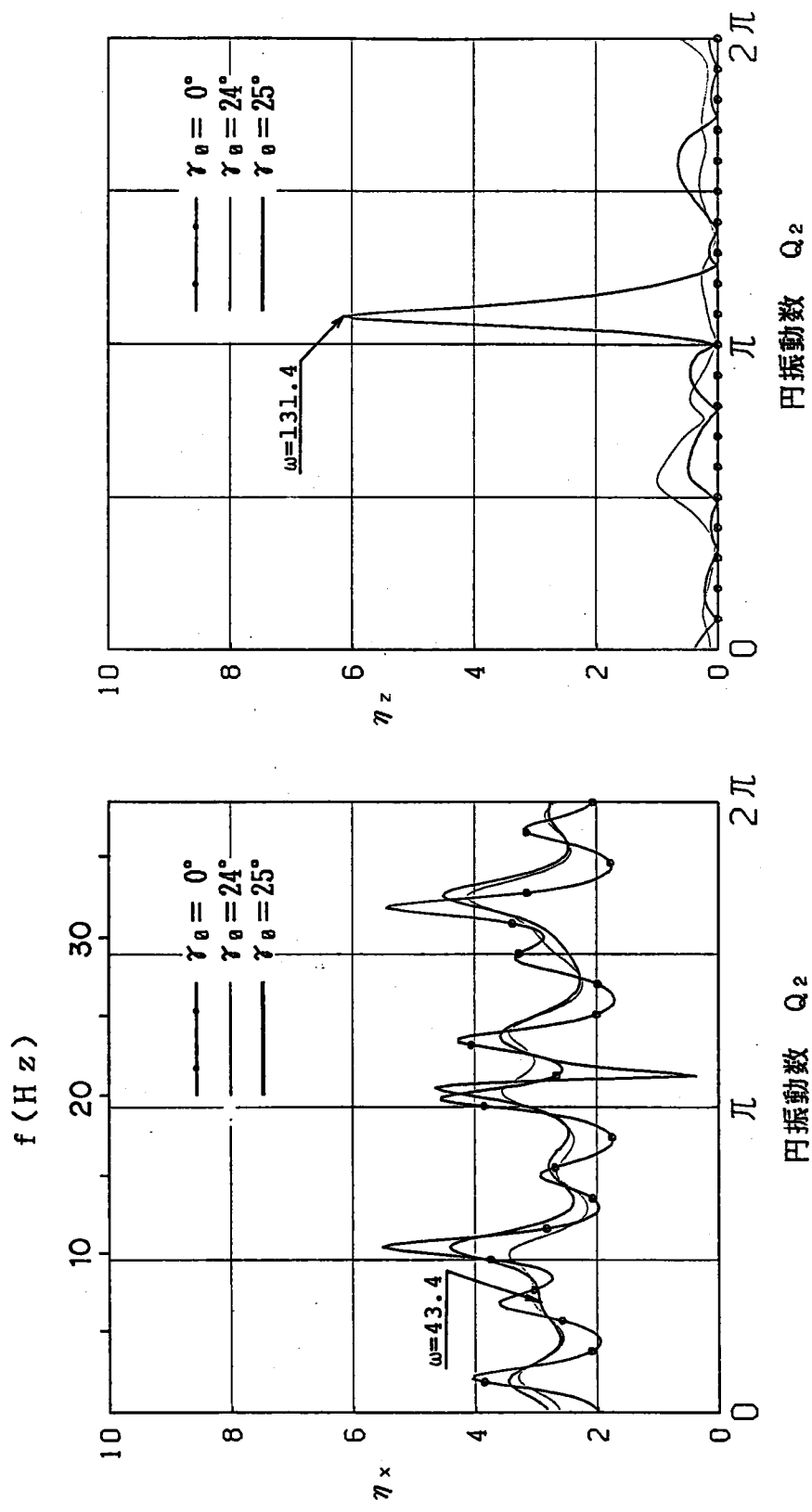


図-2.3.14 地盤H Oの地表の振動数応答関数

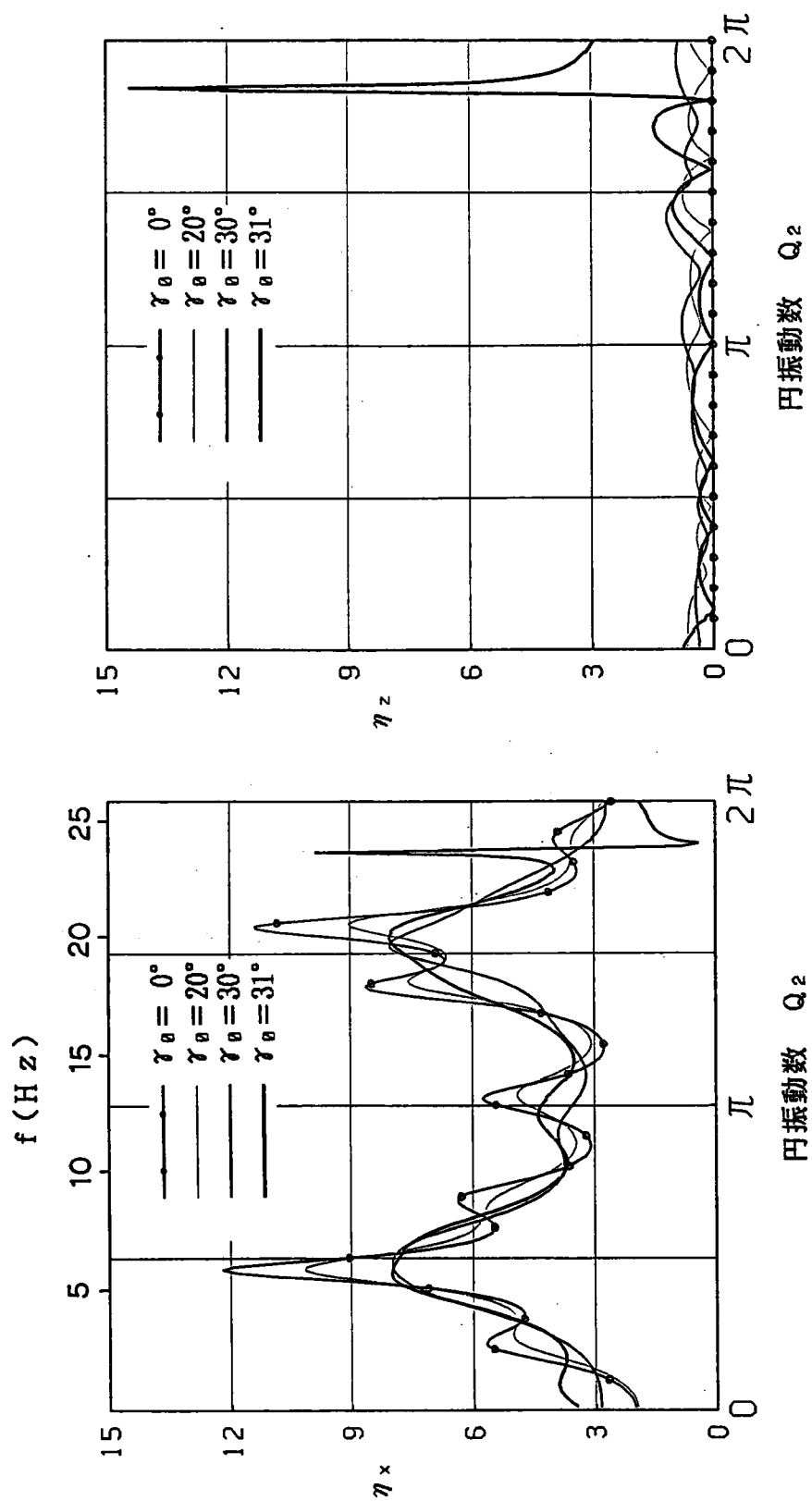


図-2.3.15 地盤H27の地表の振動数応答関数

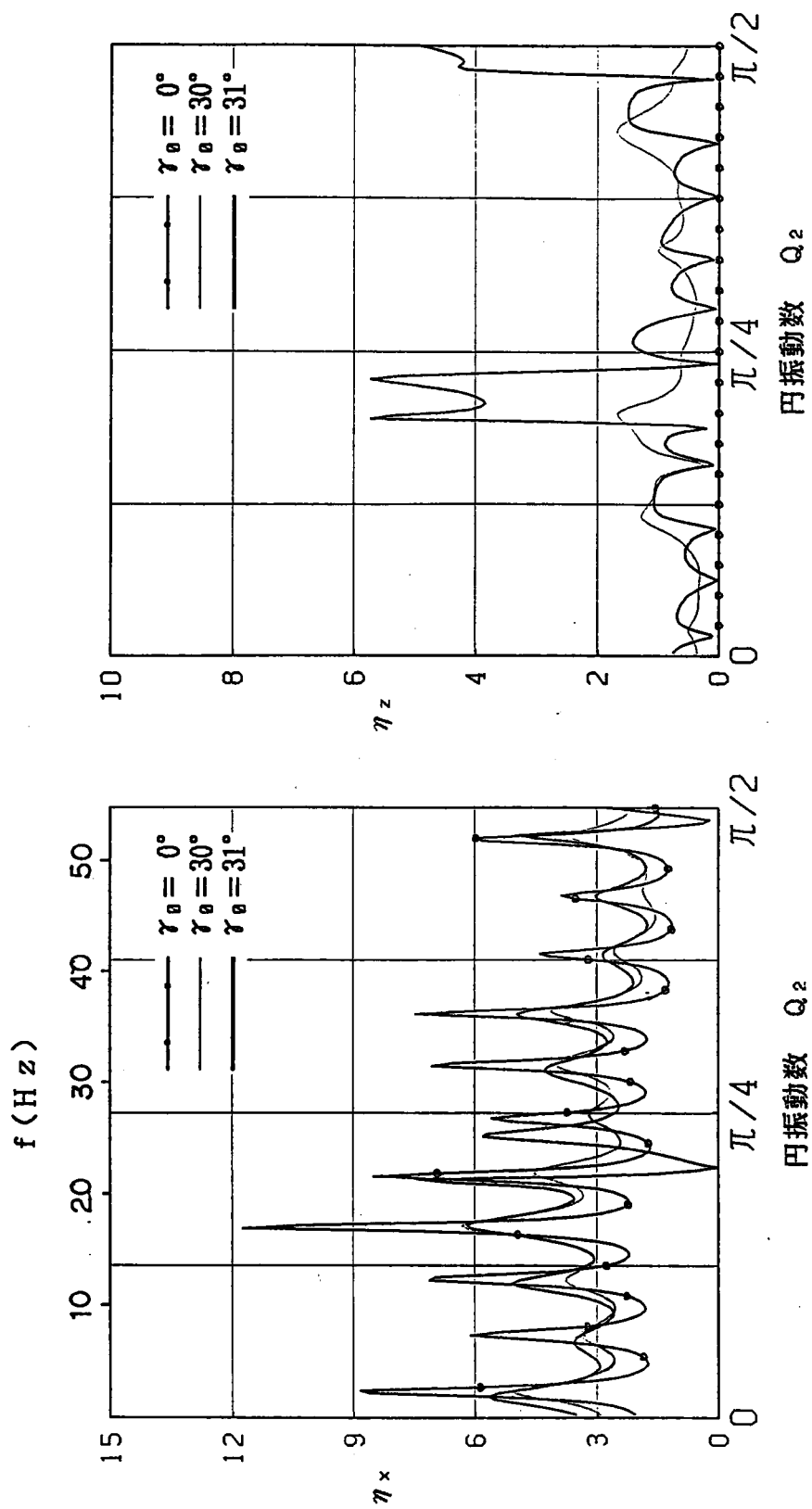


図-2.3.16 地盤H45の地表の振動数応答関数

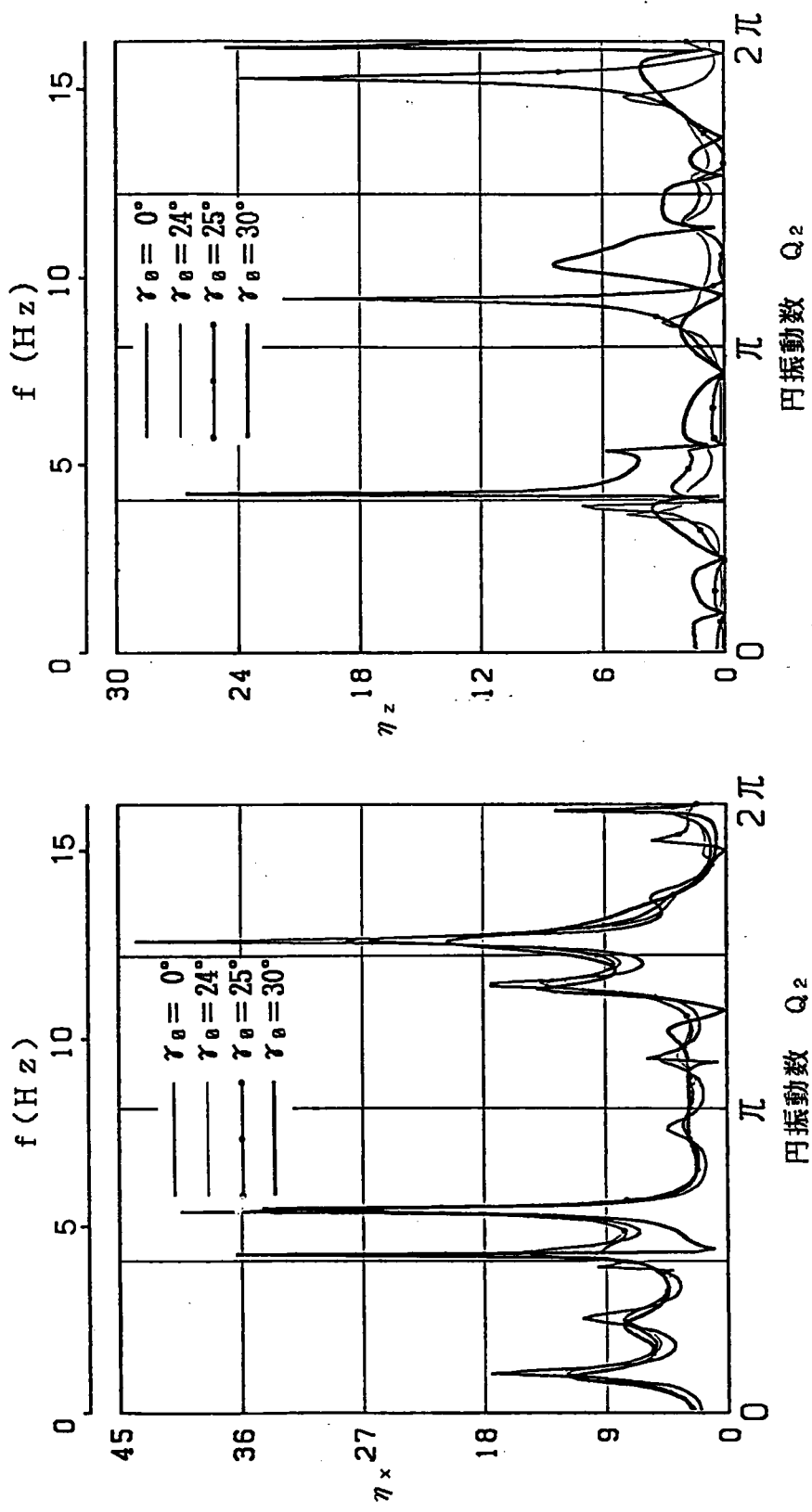


図-2.3.17 地盤L16の地表の振動数応答関数

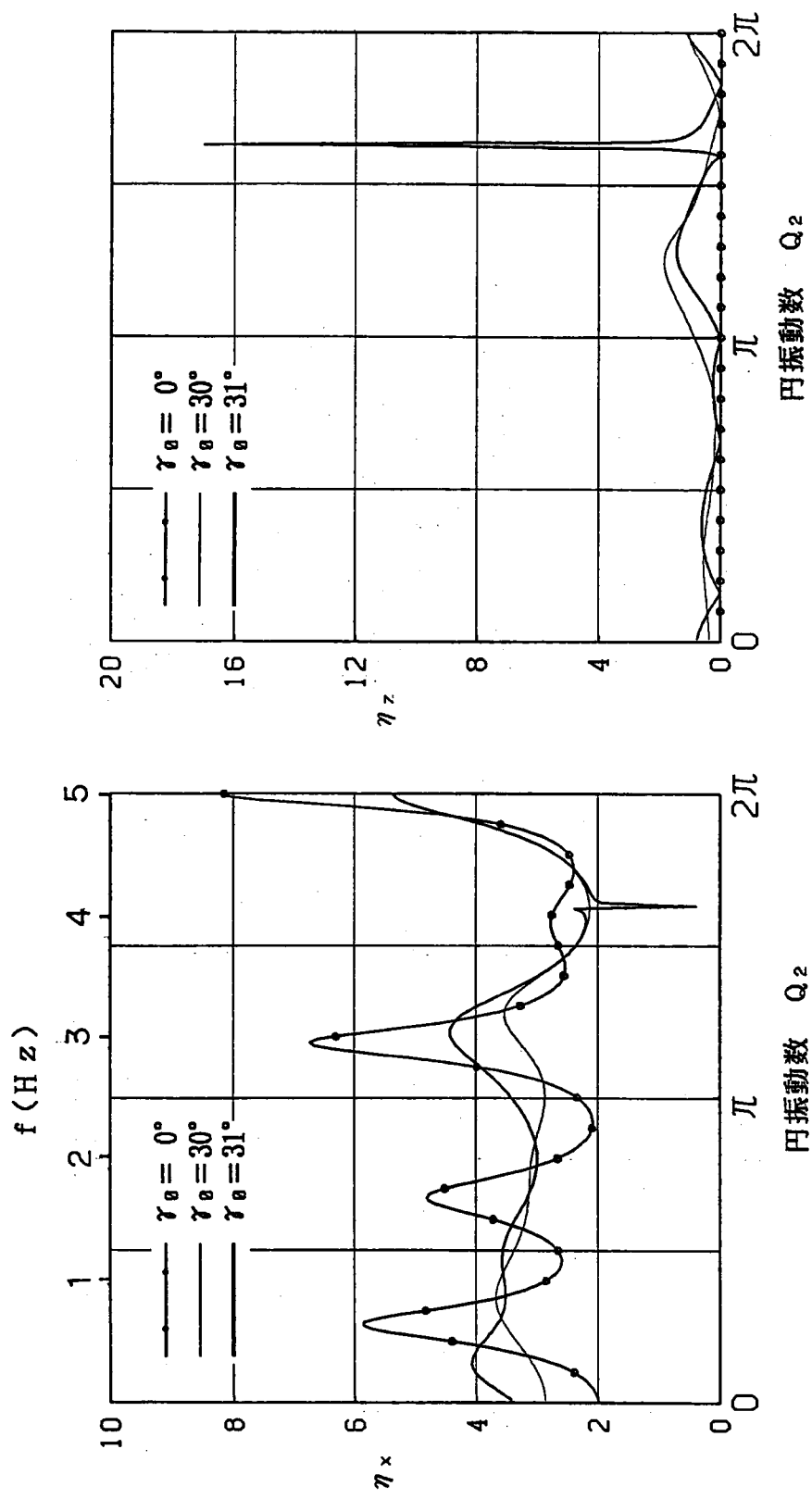


図-2.3.18 地盤H11の地表の振動数応答関数

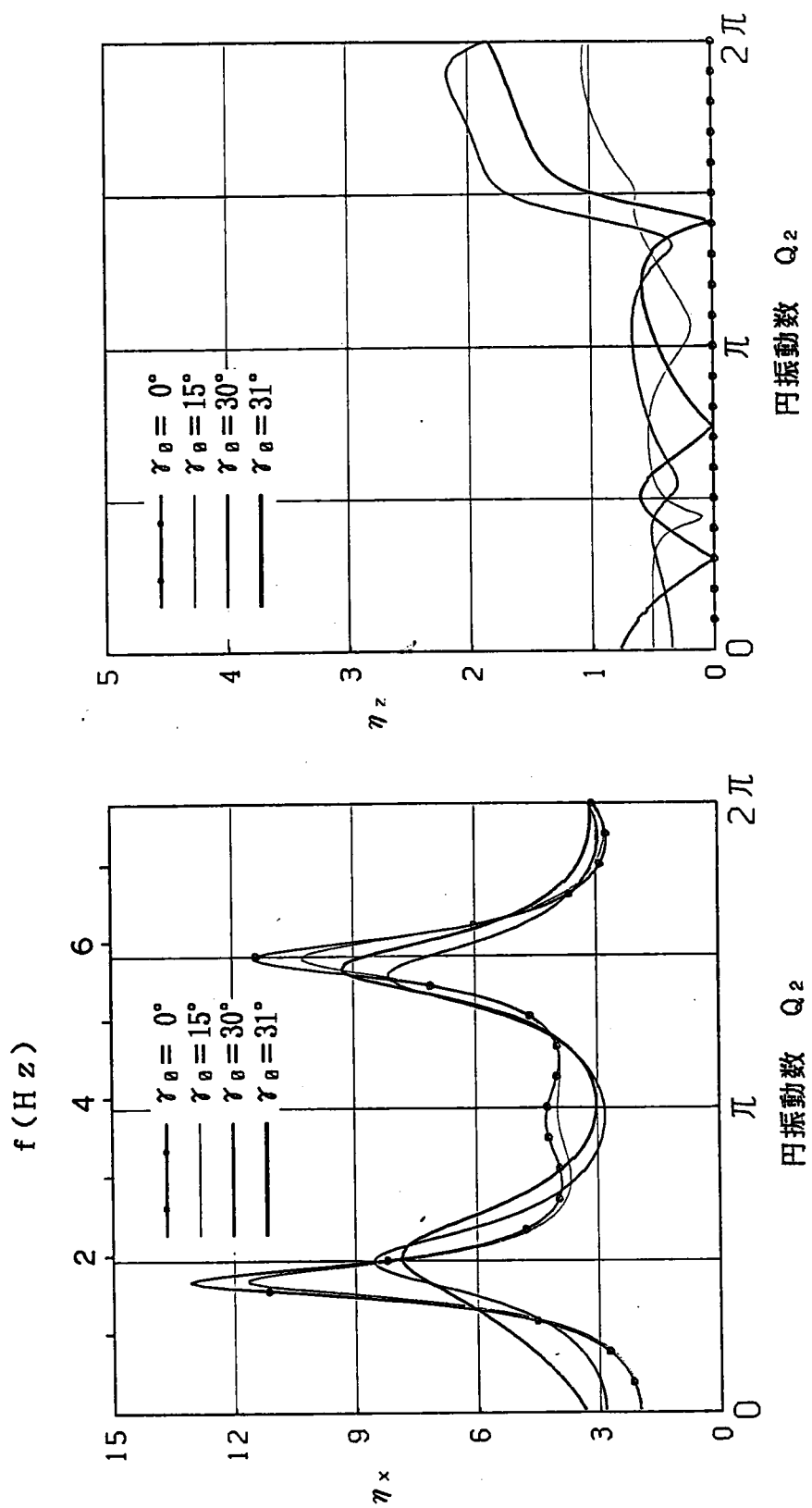


図-2.3.19 地盤H24の地表の振動数応答関数

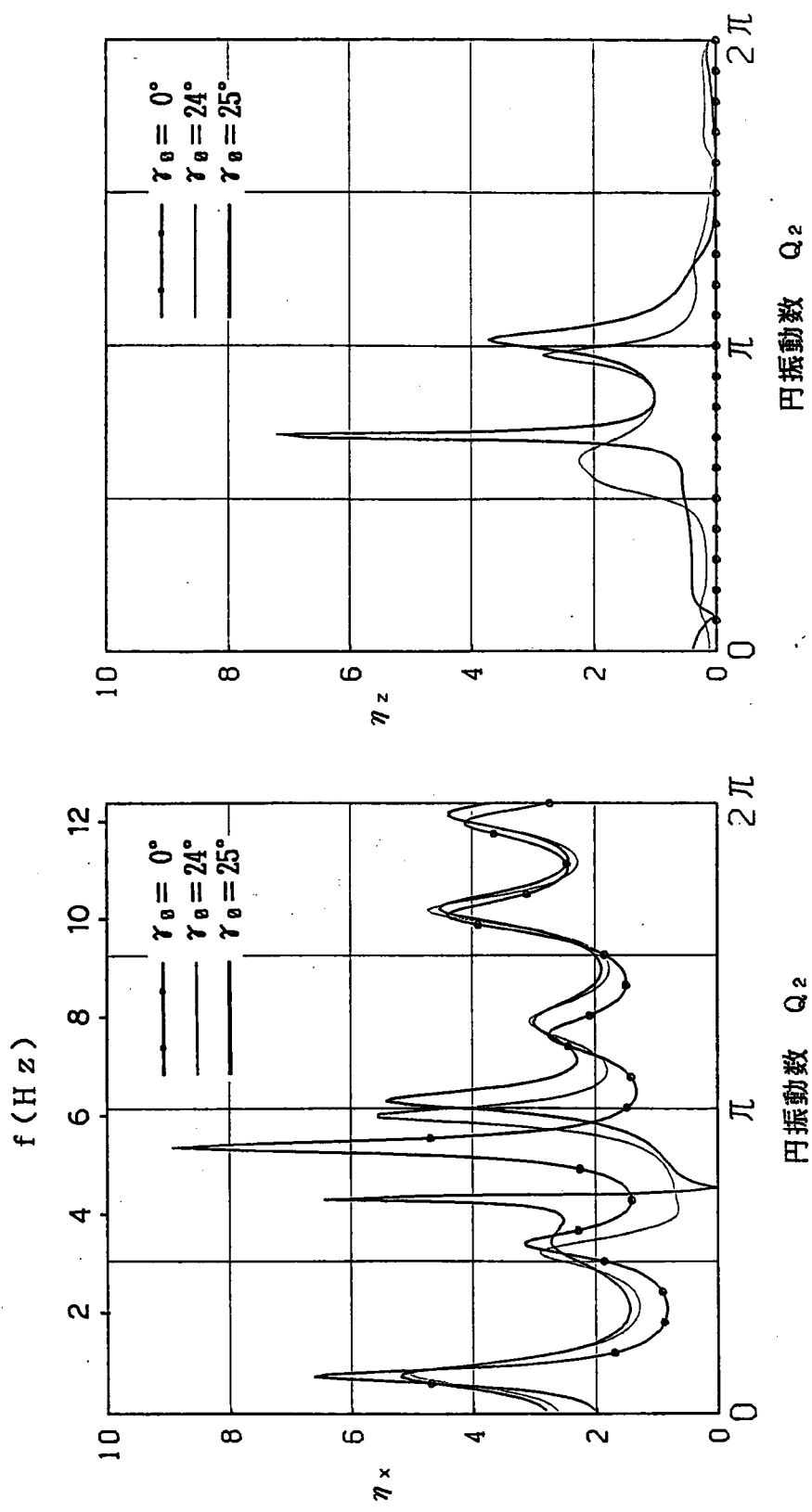


図-2.3.20 地盤H66の地表の振動数応答関数



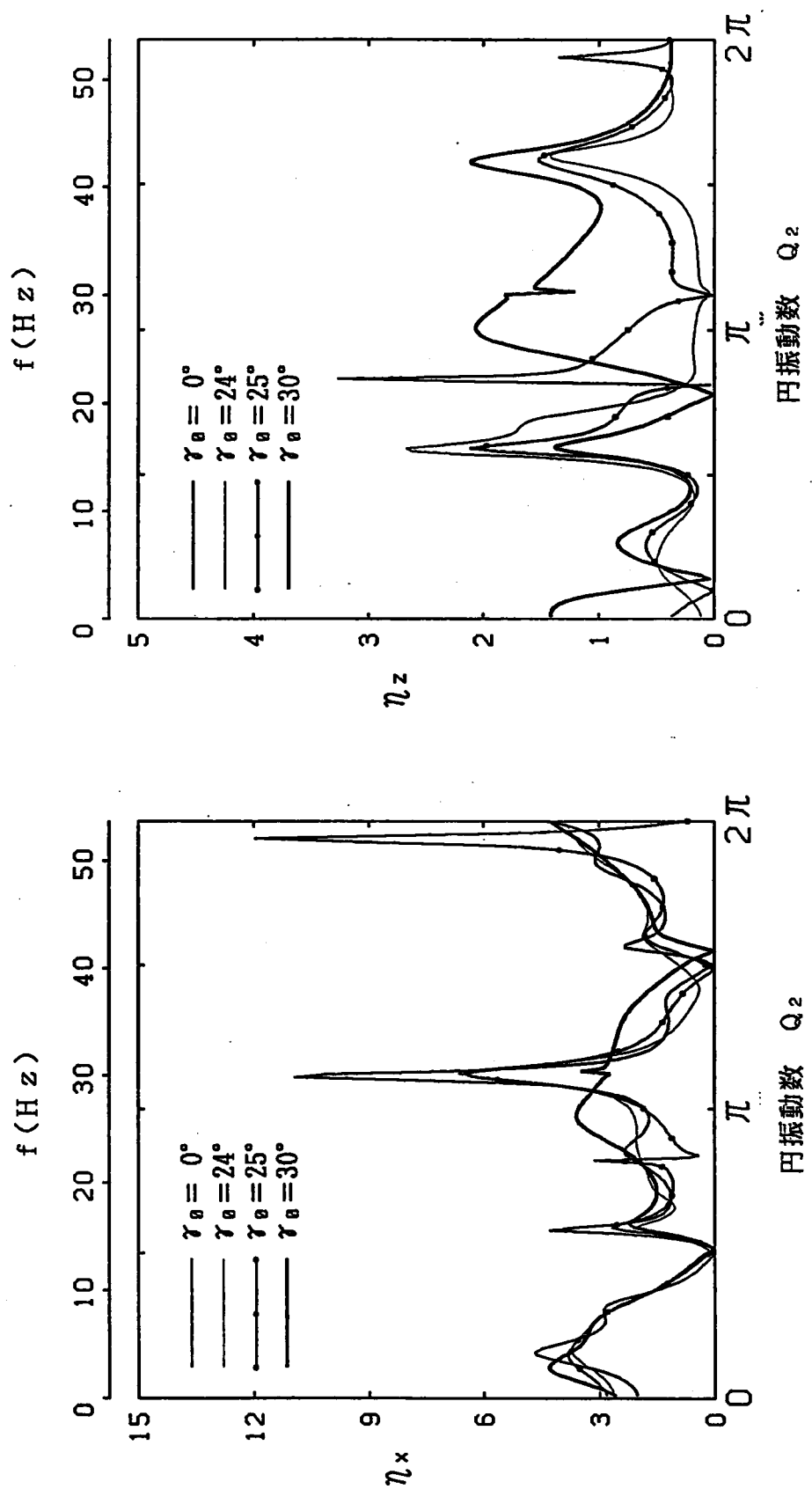


図-2.3.21(a) 地盤L6の境界(2)の振動数応答関数

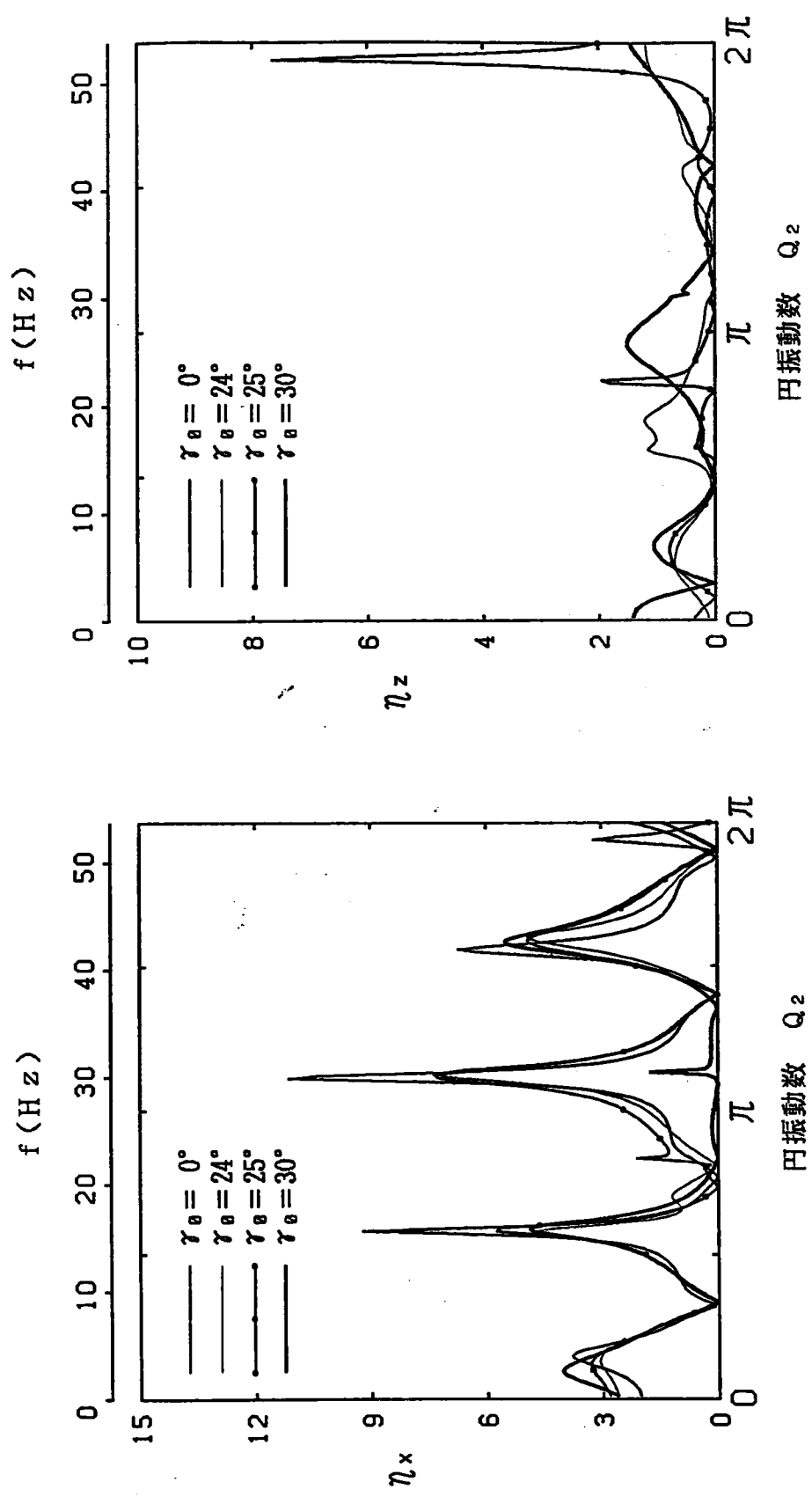


図-2.3.21(b) 地盤L6の境界(3)の振動数応答関数

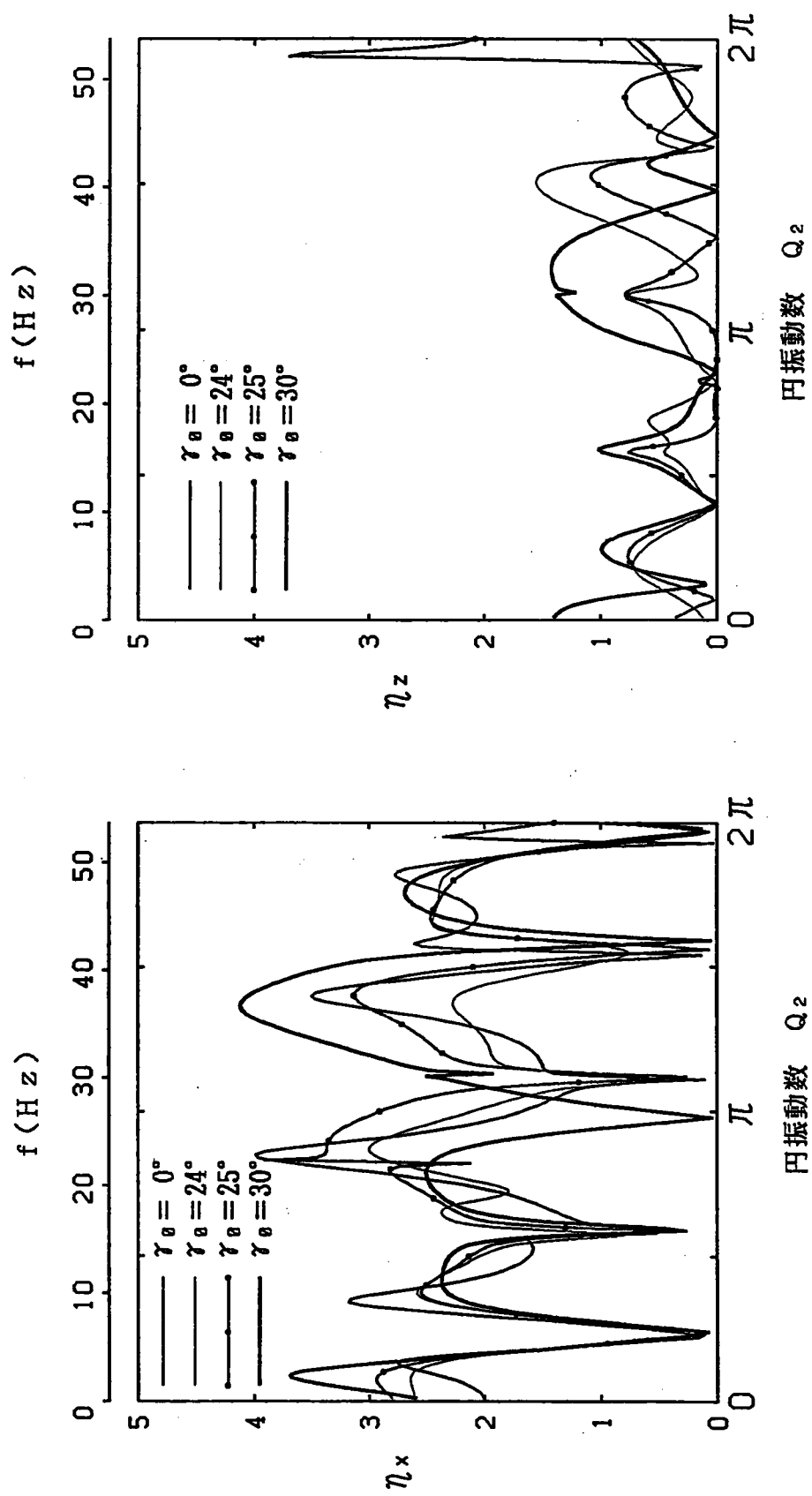


図-2.3.21(c) 地盤L6の境界(4)の振動数応答関数

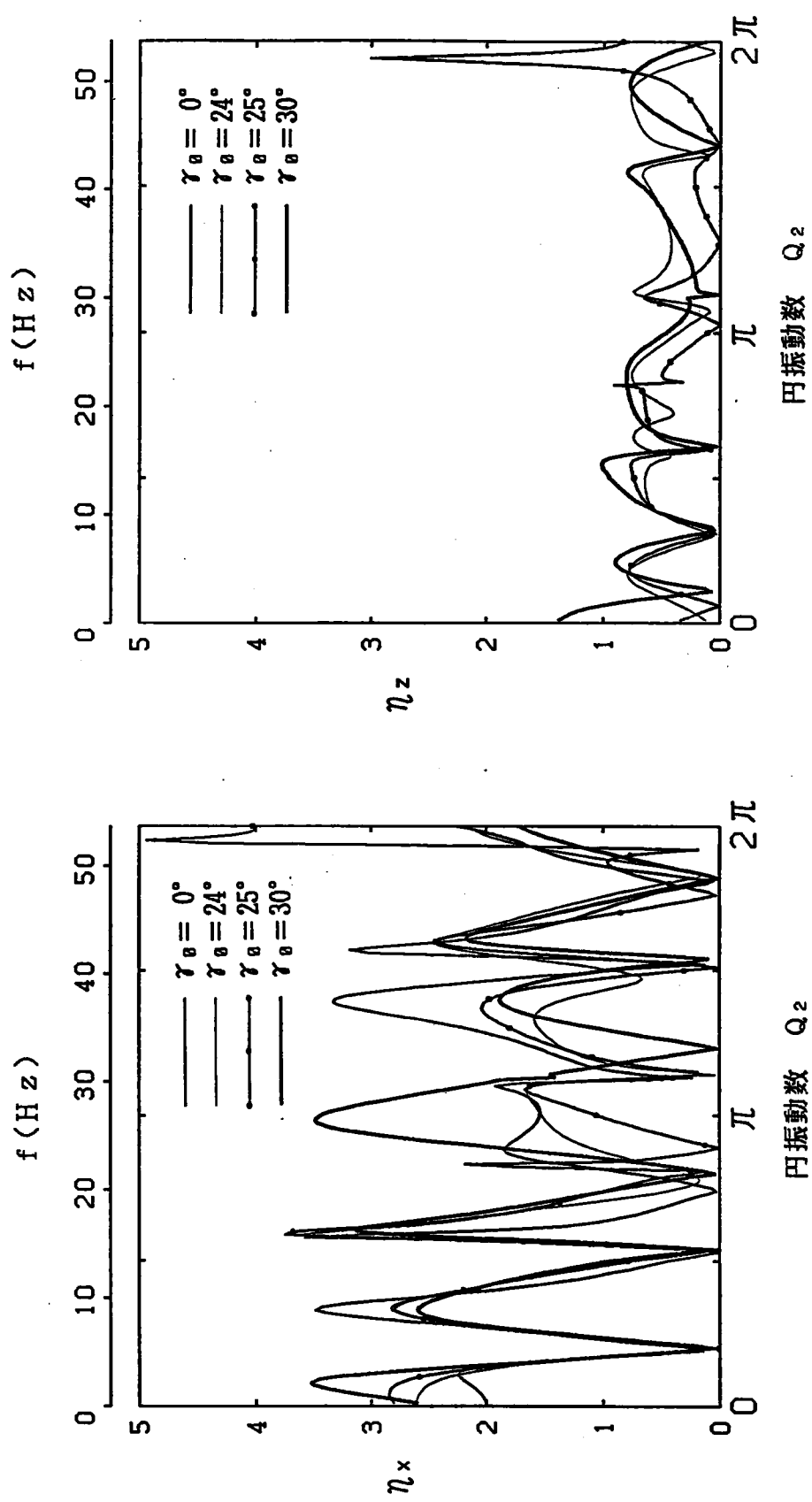


図-2.3.21(d) 地盤L6の境界(5)の振動数応答関数

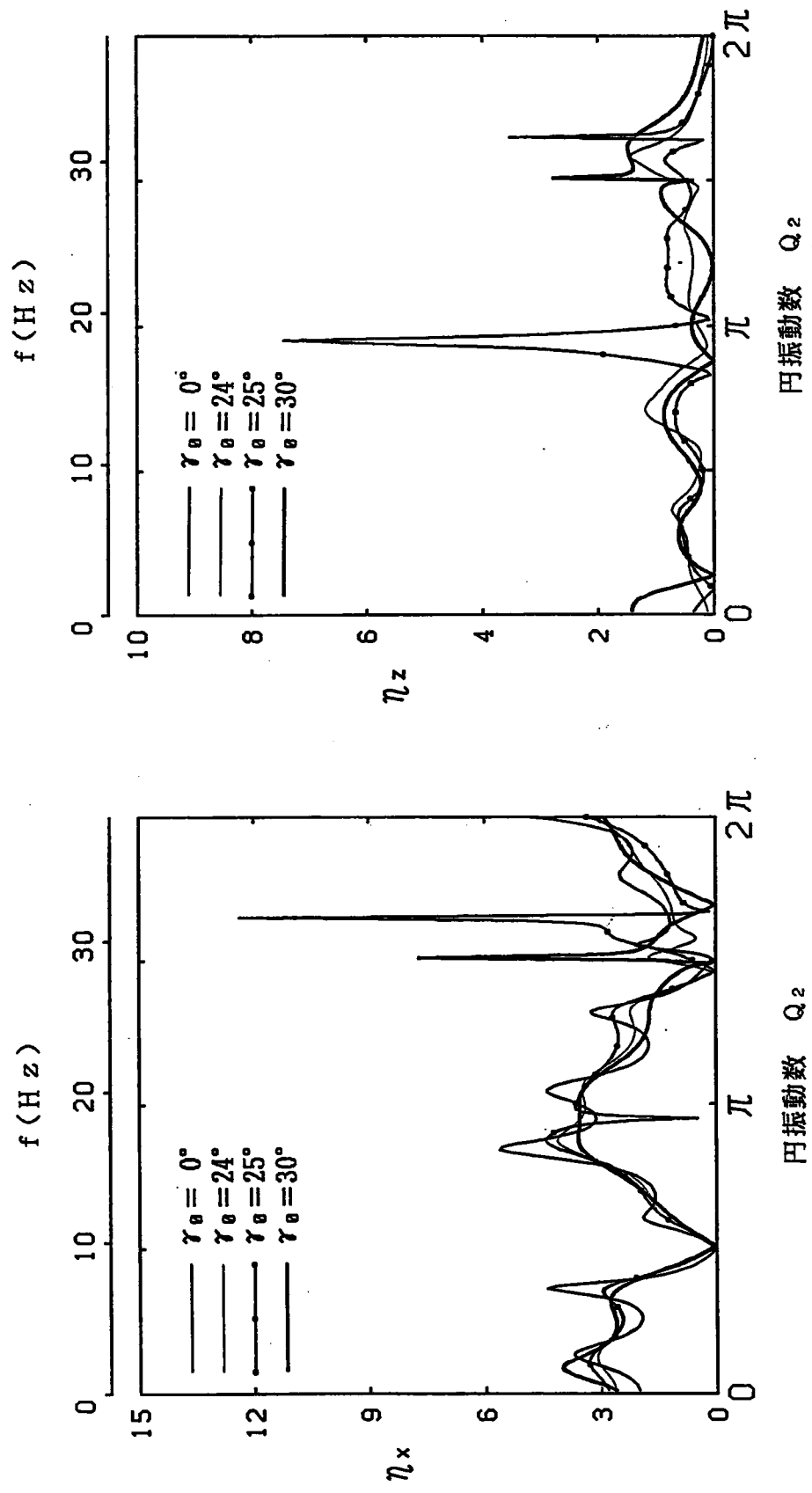


図-2.3.22(a) 地盤L9の境界(2)の振動数応答関数

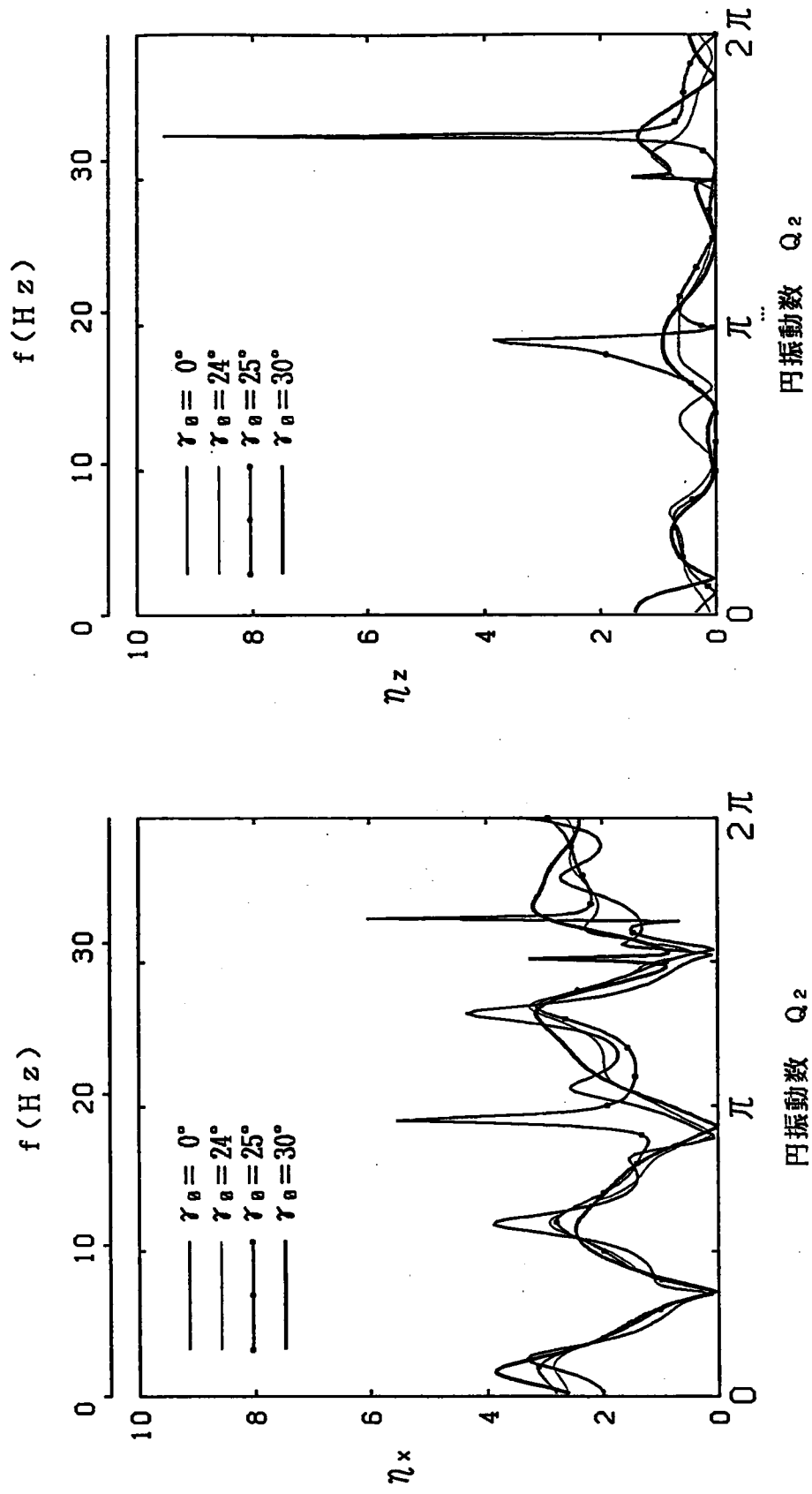


図-2.3.22(b) 地盤L9の境界(3)の振動数応答関数

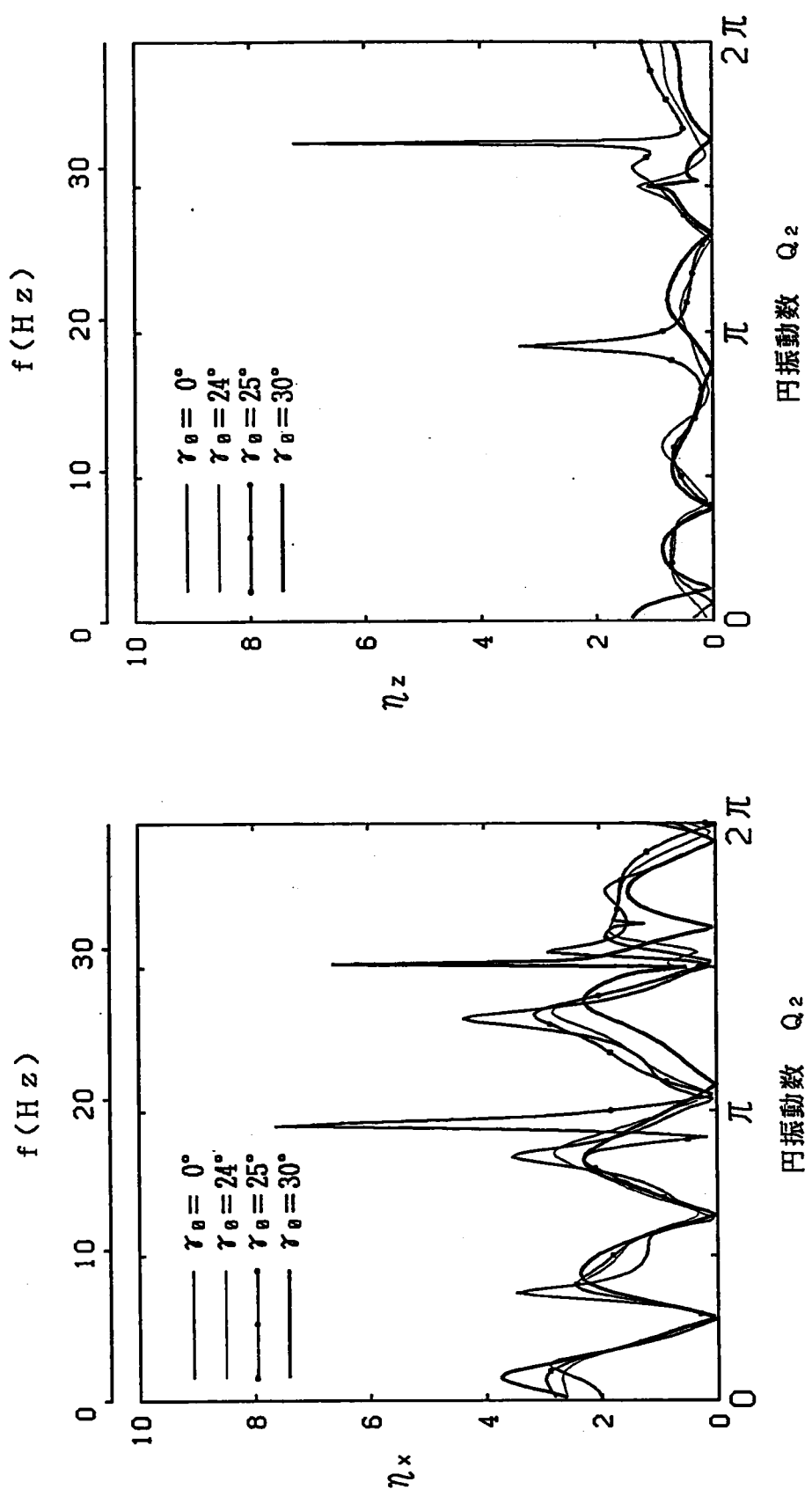
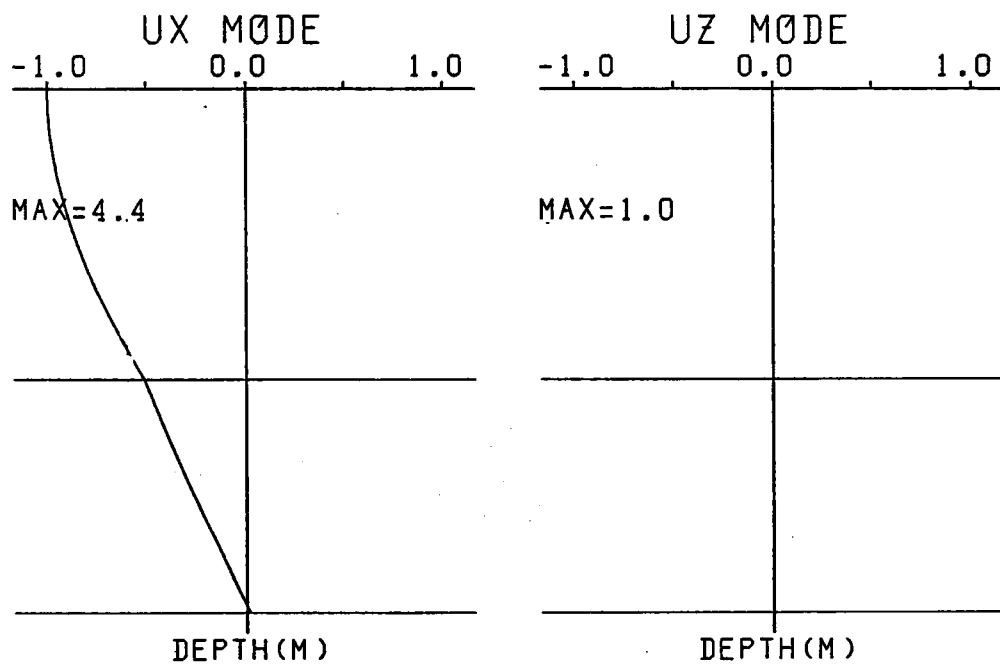
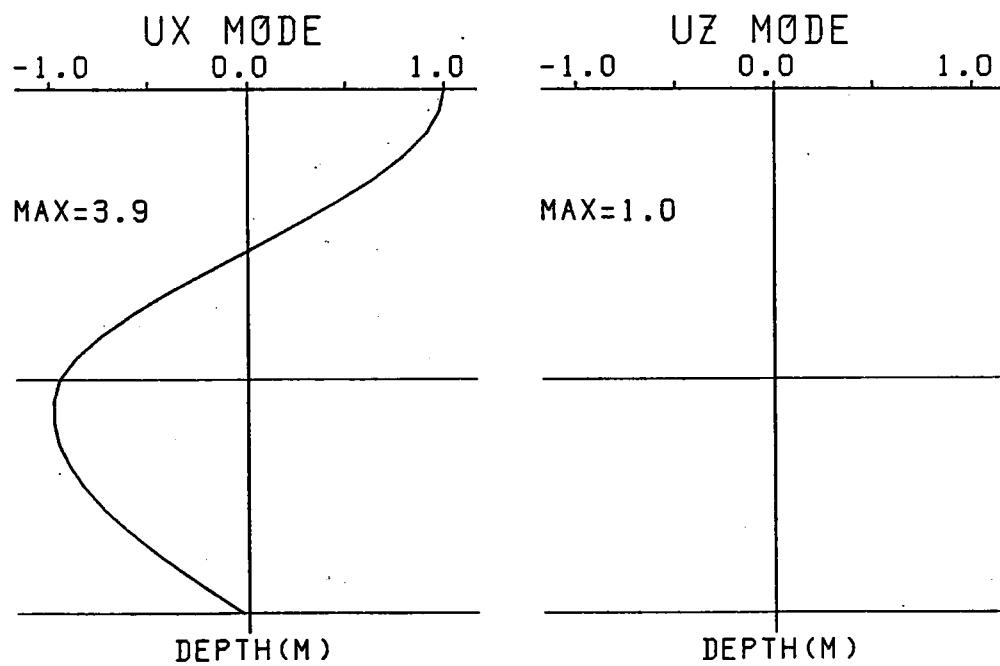


図-2.3.22(c) 地盤L9の境界(4)の振動数応答関数



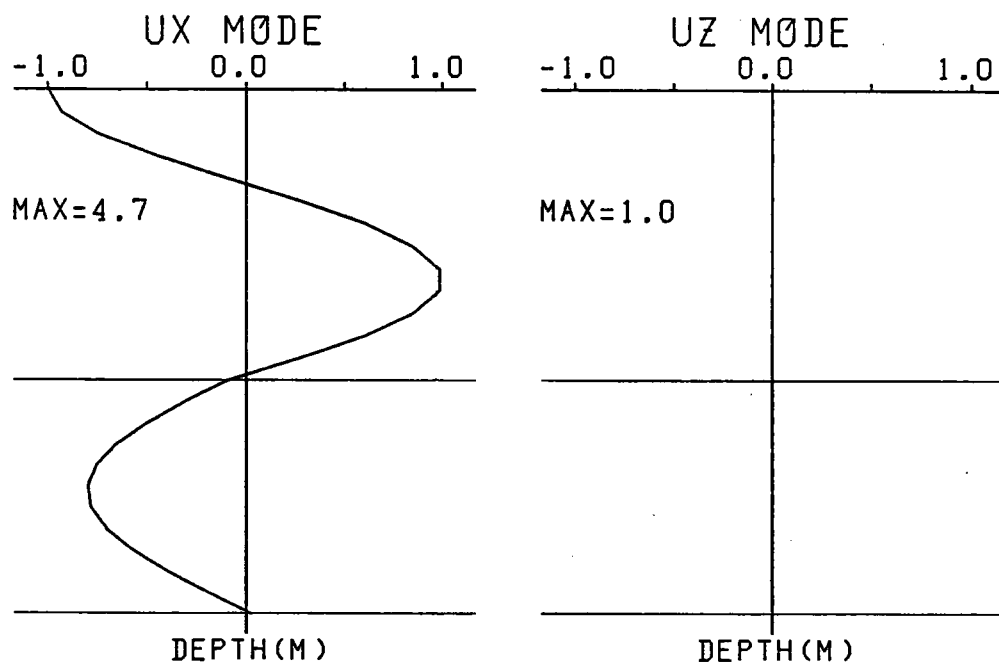
$\gamma_0 = 0^\circ$  ,  $\omega = 76.8 \text{ rad/sec}$



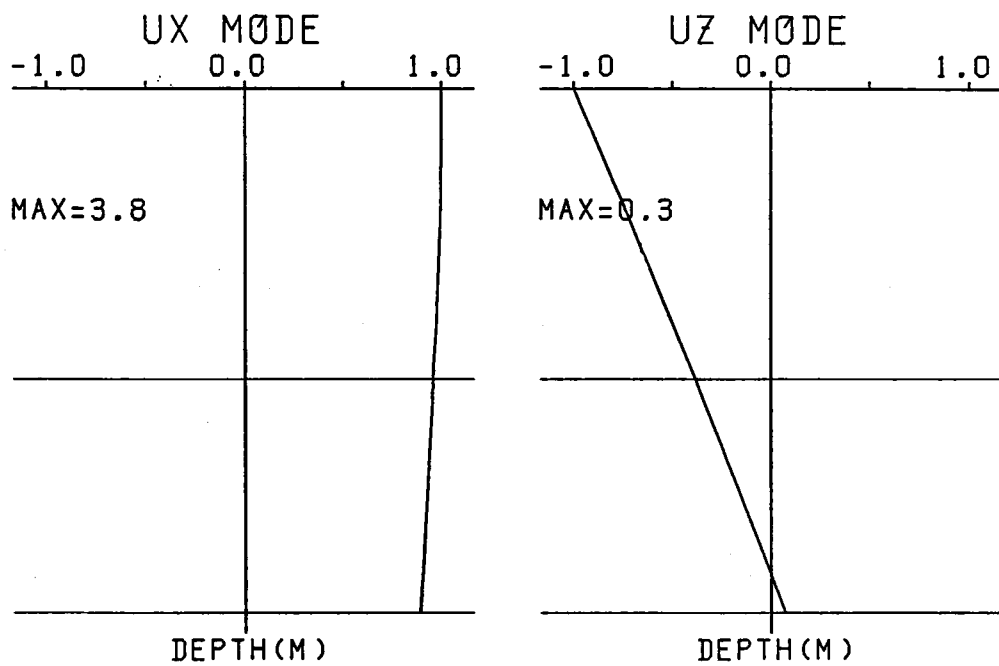
$\gamma_0 = 0^\circ$  ,  $\omega = 208.4 \text{ rad/sec}$

図-2.3.23(a) 地盤H20の振動モード



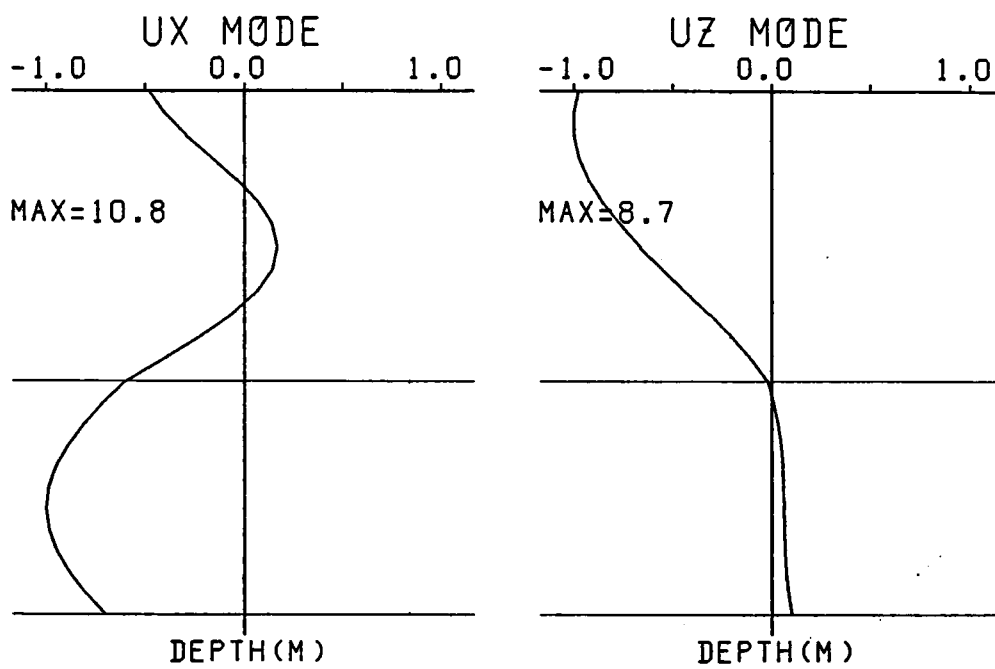


$$\gamma_0 = 0^\circ, \quad \omega = 354.3 \text{ rad/sec}$$

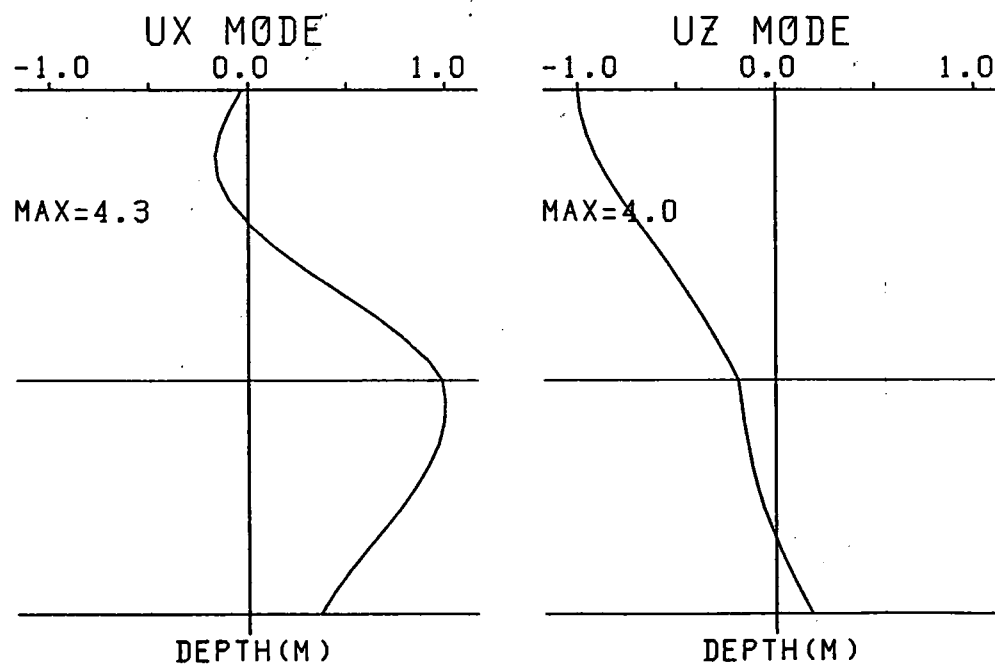


$$\gamma_0 = 31^\circ, \quad \omega = 25.5 \text{ rad/sec}$$

図-2.3.23(b) 地盤H20の振動モード

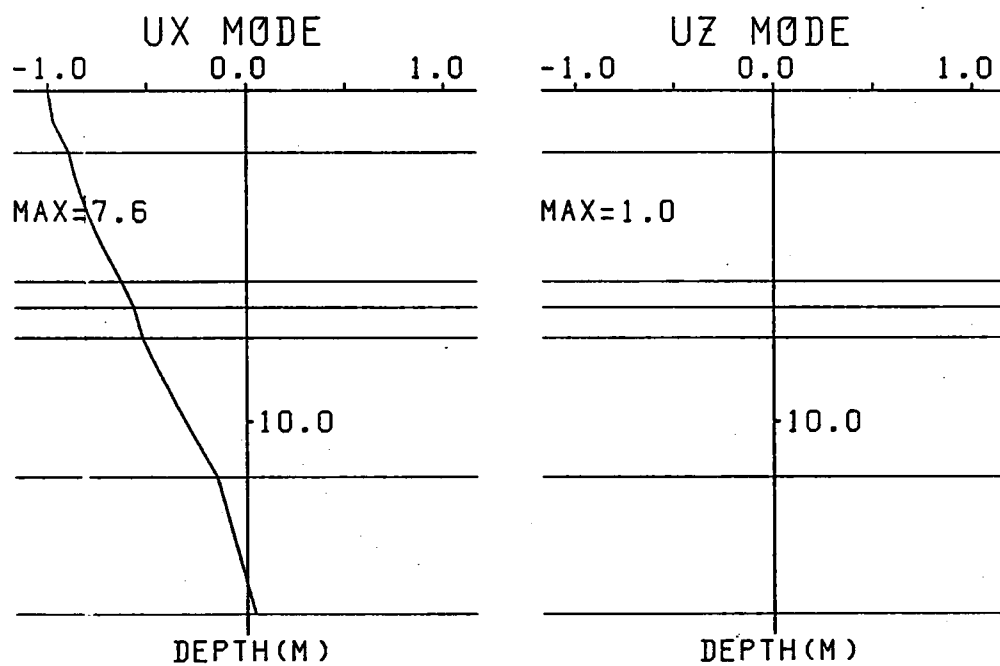


$$\gamma_0 = 31^\circ, \omega = 317.3 \text{ rad/sec}$$

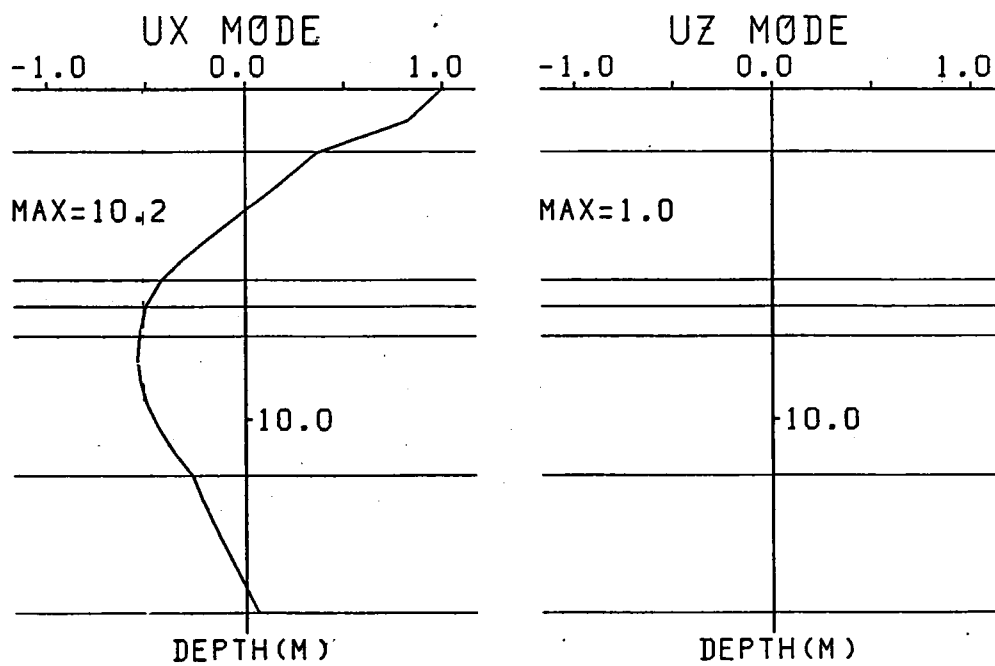


$$\gamma_0 = 31^\circ, \omega = 328.8 \text{ rad/sec}$$

図-2.3.23(c) 地盤H20の振動モード

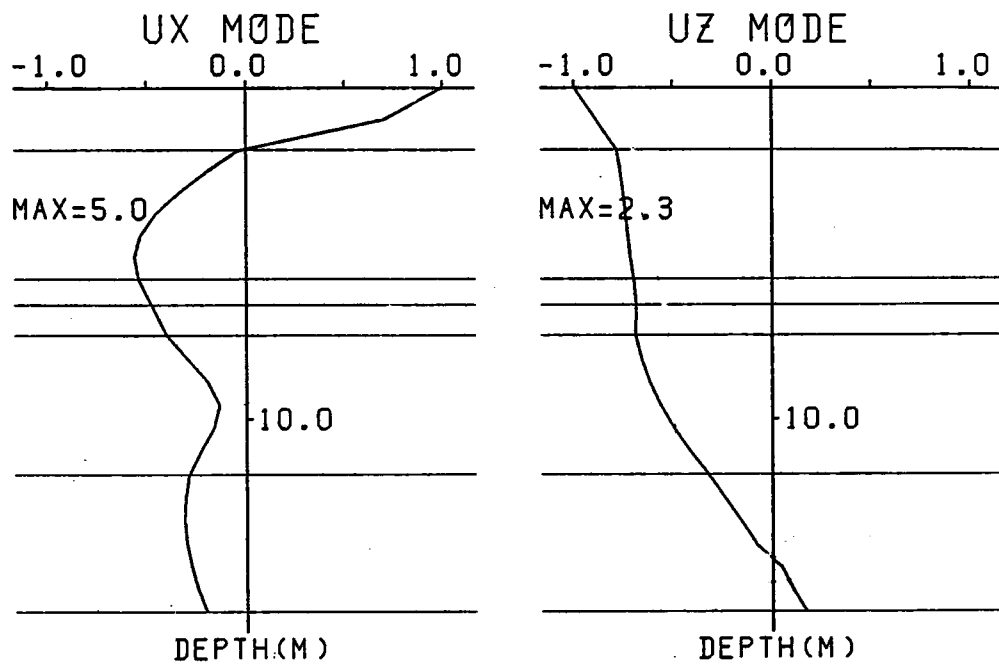


$\gamma_0 = 0^\circ$  ,  $\omega = 22.3 \text{ rad/sec}$

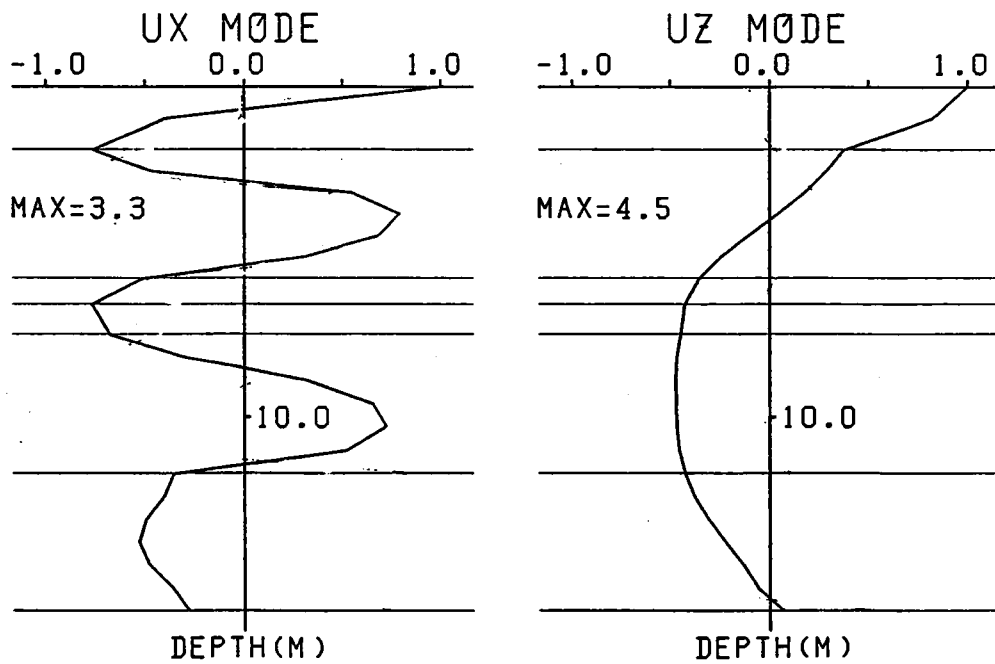


$\gamma_0 = 0^\circ$  ,  $\omega = 56.5 \text{ rad/sec}$

図-2.3.24(a) 地盤H48の振動モード

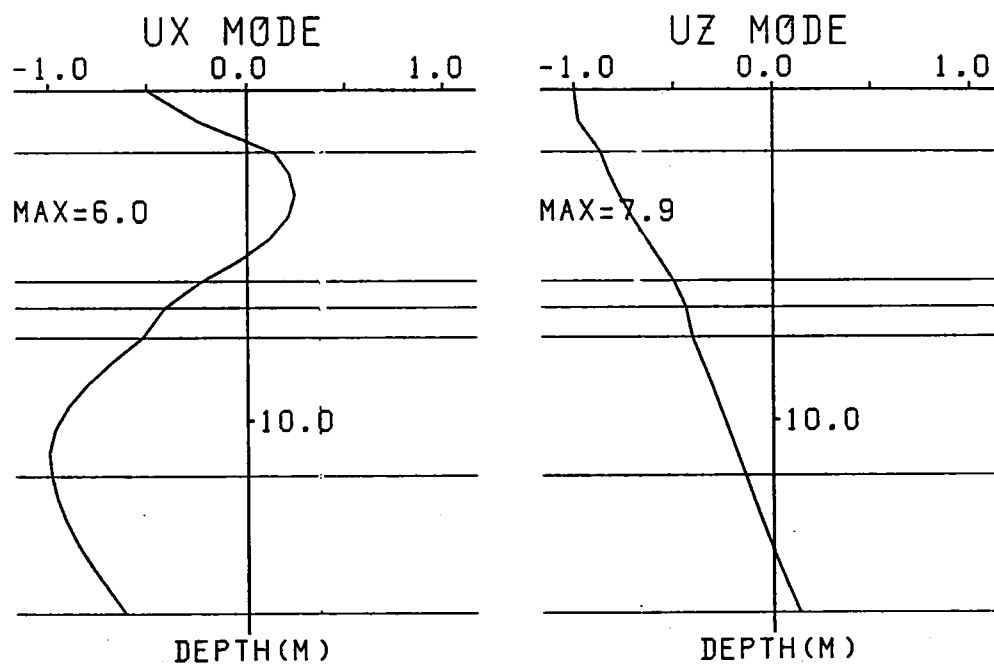


$$\gamma_0 = 30^\circ, \omega = 77.4 \text{ rad/sec}$$

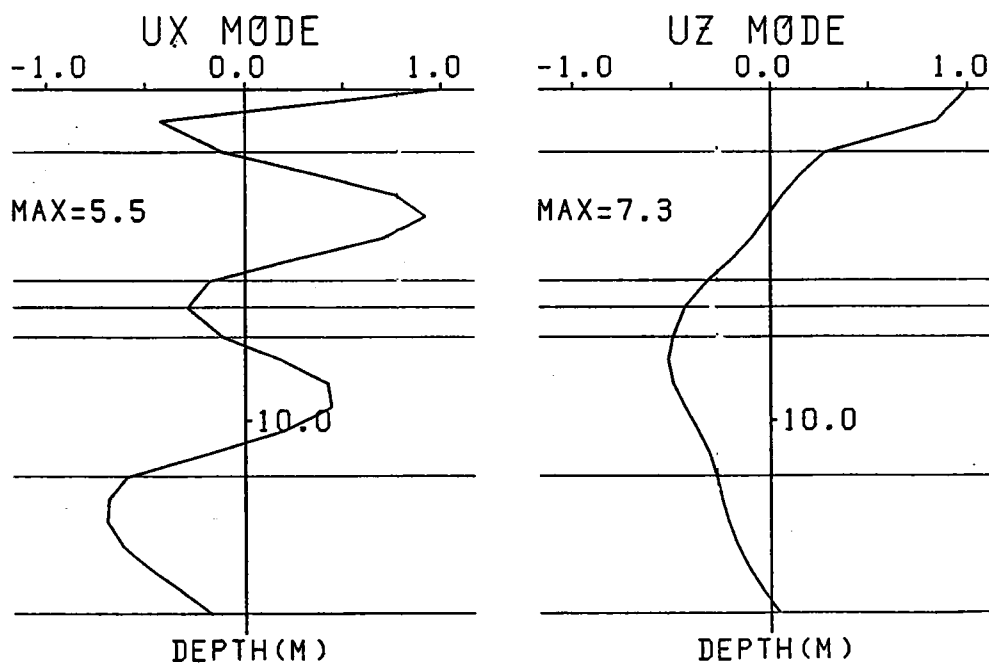


$$\gamma_0 = 30^\circ, \omega = 189.0 \text{ rad/sec}$$

図-2.3.24(b) 地盤H48の振動モード

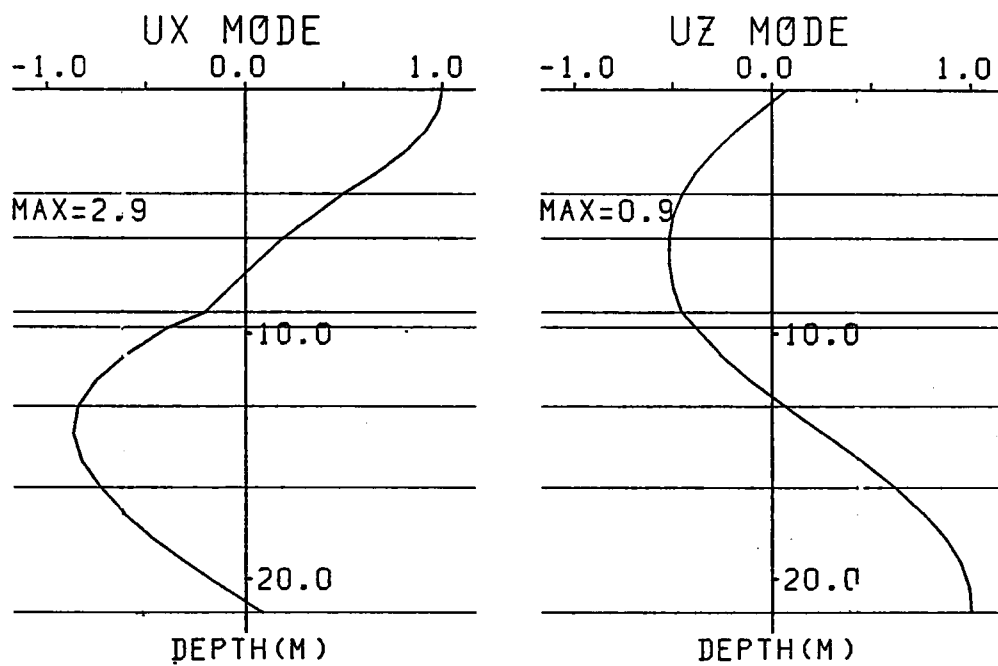


$$\gamma_0 = 31^\circ, \quad \omega = 86.3 \text{ rad/sec}$$

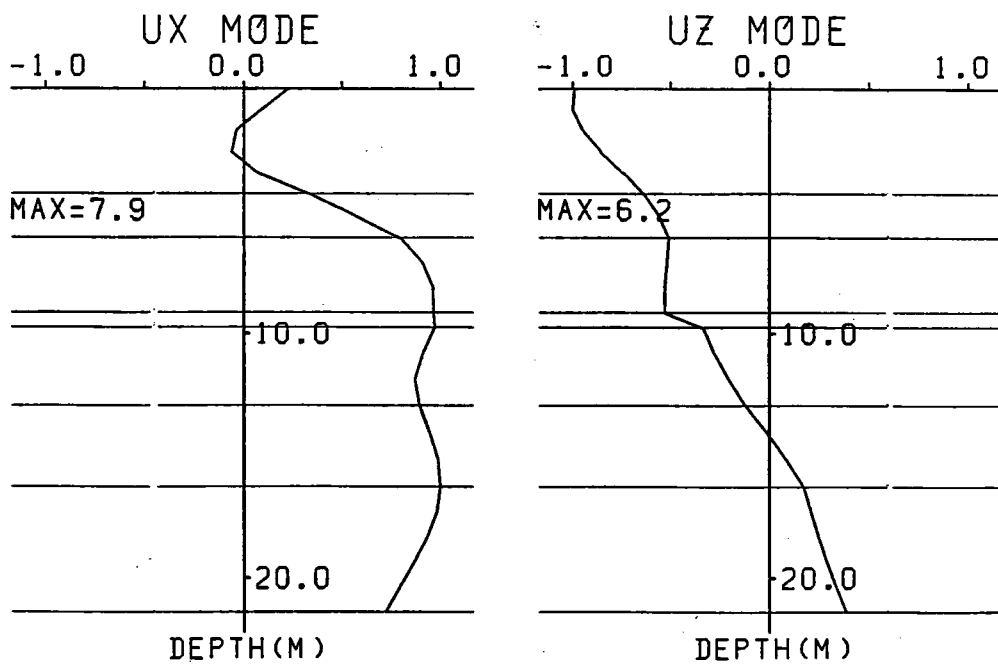


$$\gamma_0 = 31^\circ, \quad \omega = 193.5 \text{ rad/sec}$$

図-2.3.24(c) 地盤H48の振動モード



$$\gamma_0 = 25^\circ, \quad \omega = 43.4 \text{ rad/sec}$$



$$\gamma_0 = 25^\circ, \quad \omega = 131.4 \text{ rad/sec}$$

図-2.3.25 地盤H0の振動モード

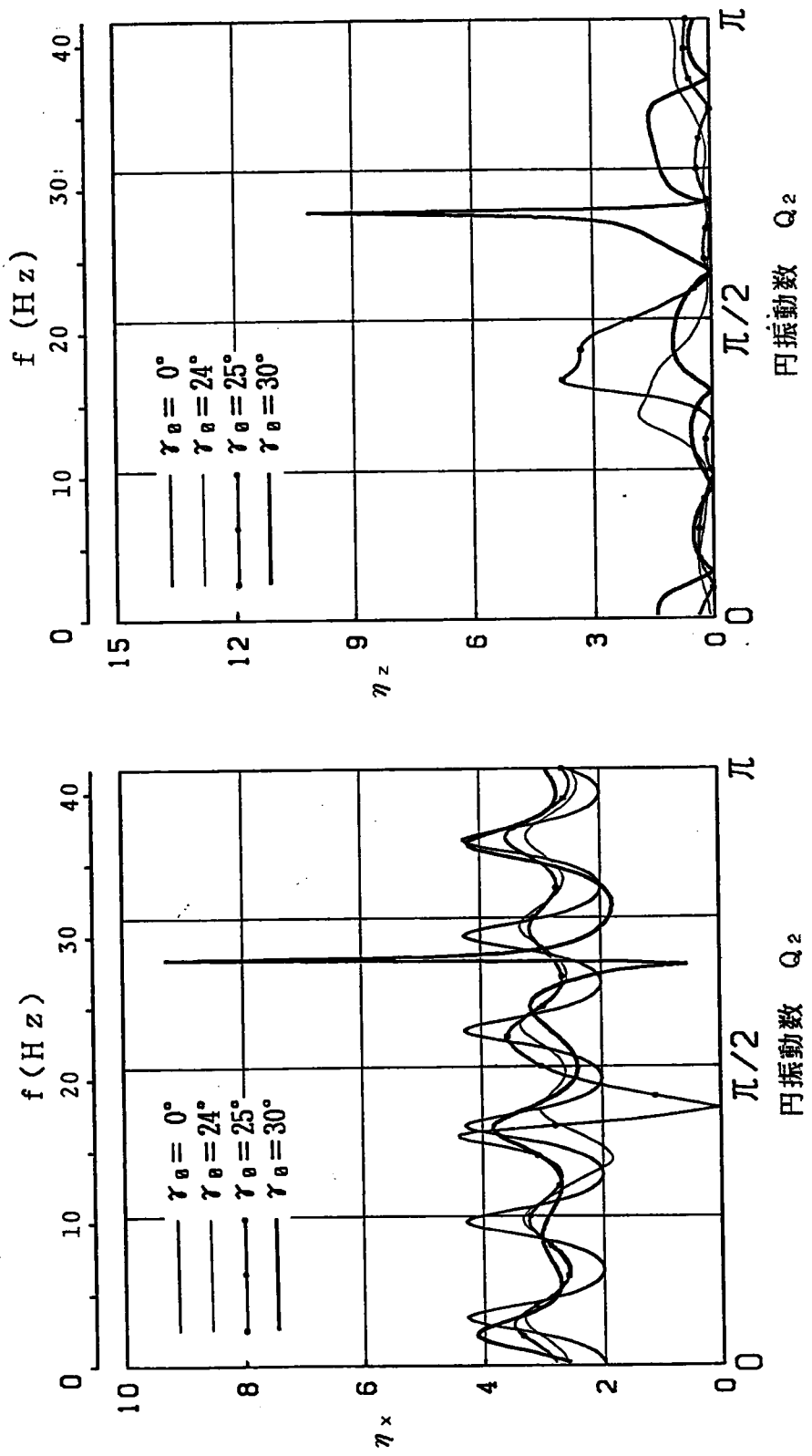


図-2.3.26(a) 2層化した地盤L6の地表の振動数応答関数

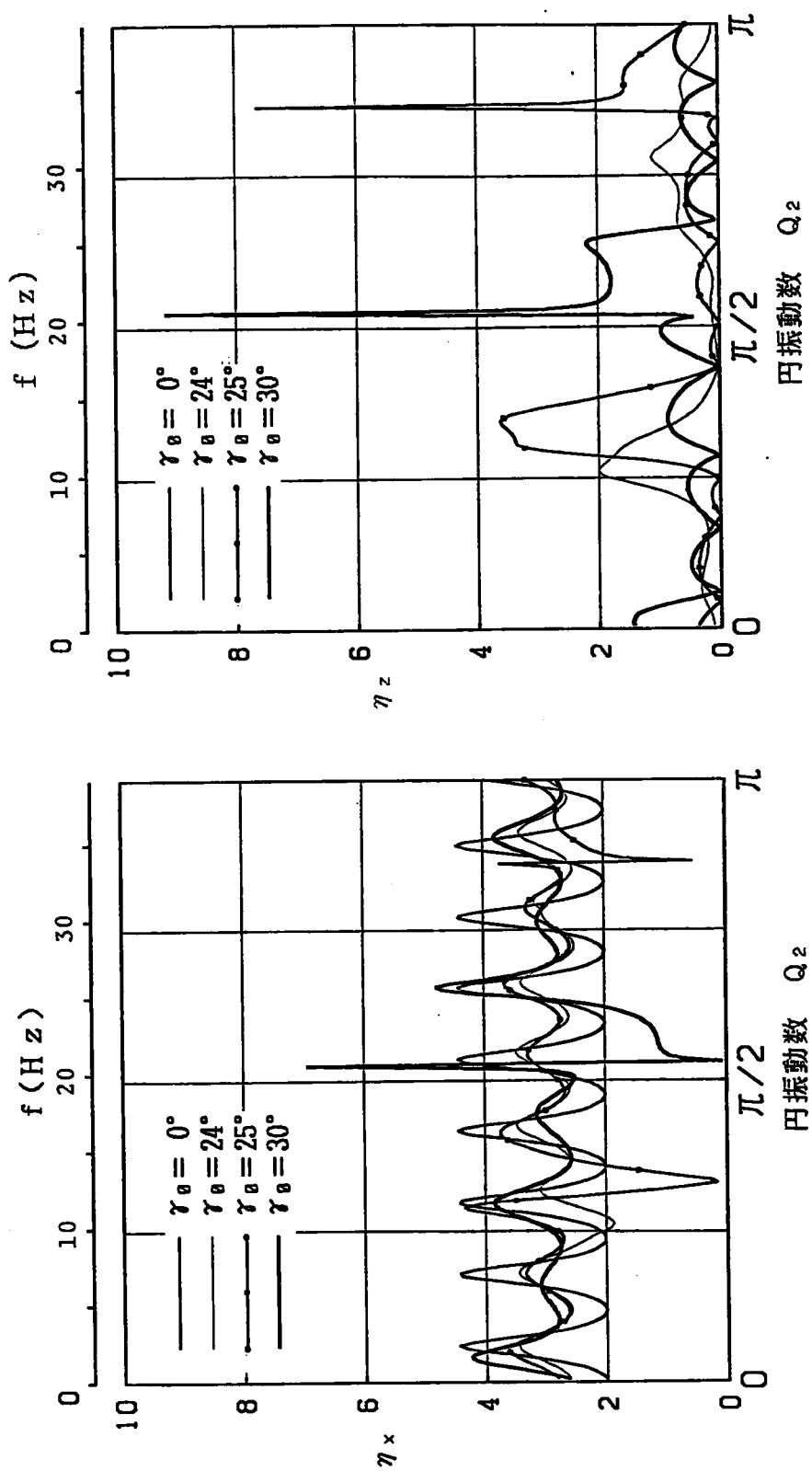
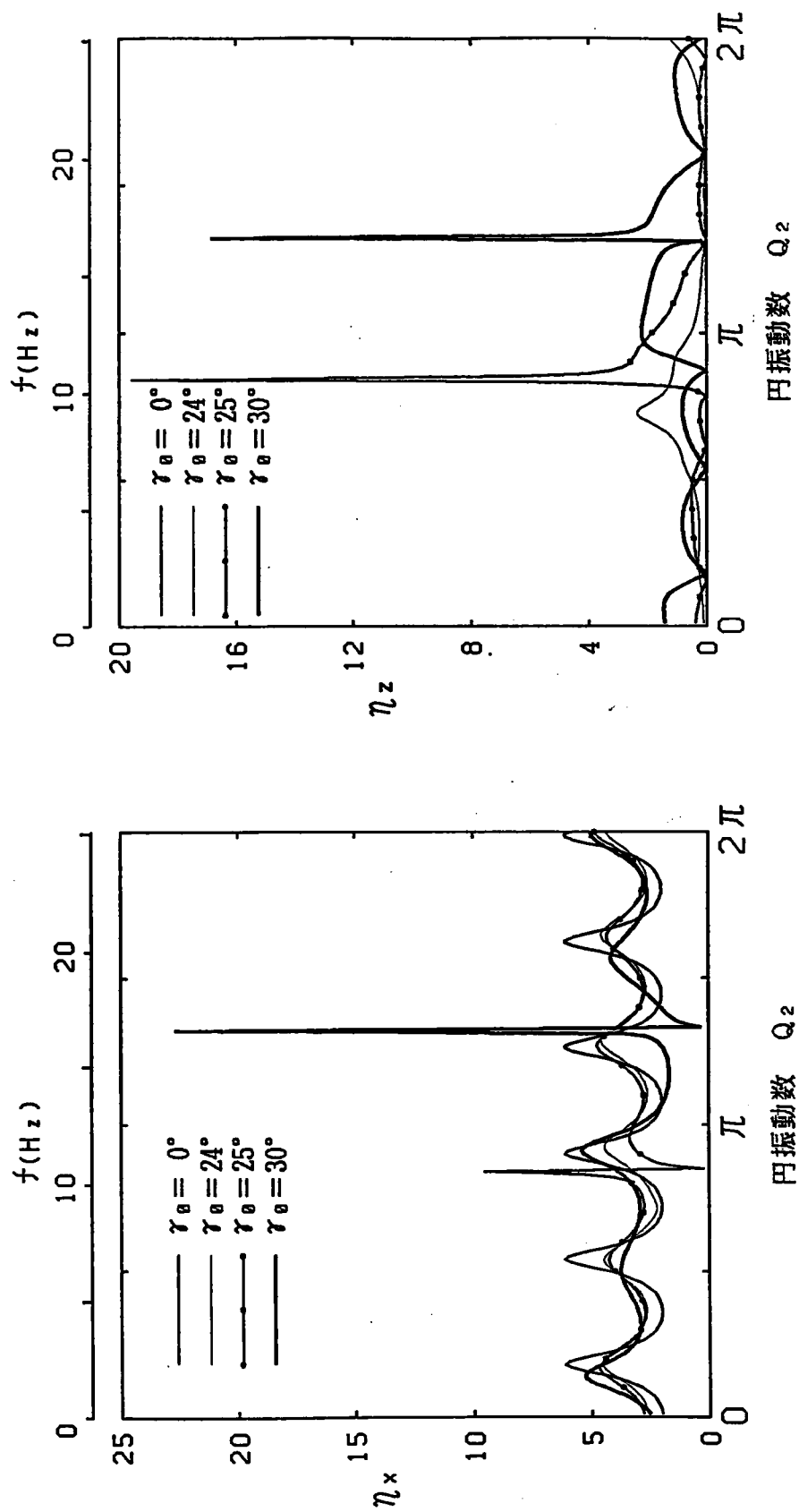
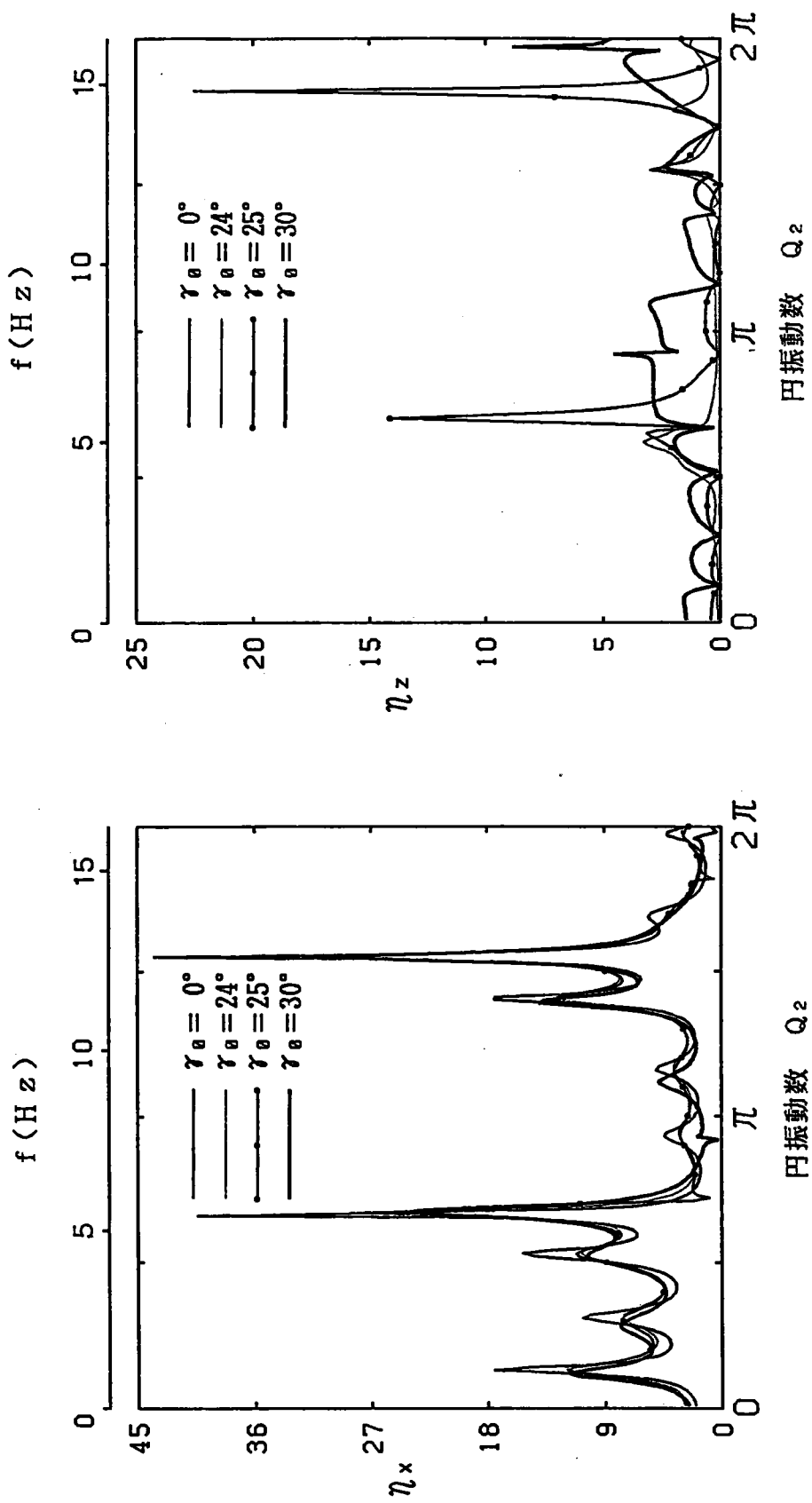


図-2.3.26(b) 2層化した地盤L9の地表の振動数応答関数





図一2.3.26(c) 2層化した地盤L11の地表の振動数応答関数



地盤L16の $C_1 \leq 100 \text{ m/sec}$ の層の  
ポアソン比を $\nu = 0.49$ とした場合

図-2.3.27 地盤L16'の地表の振動数応答関数

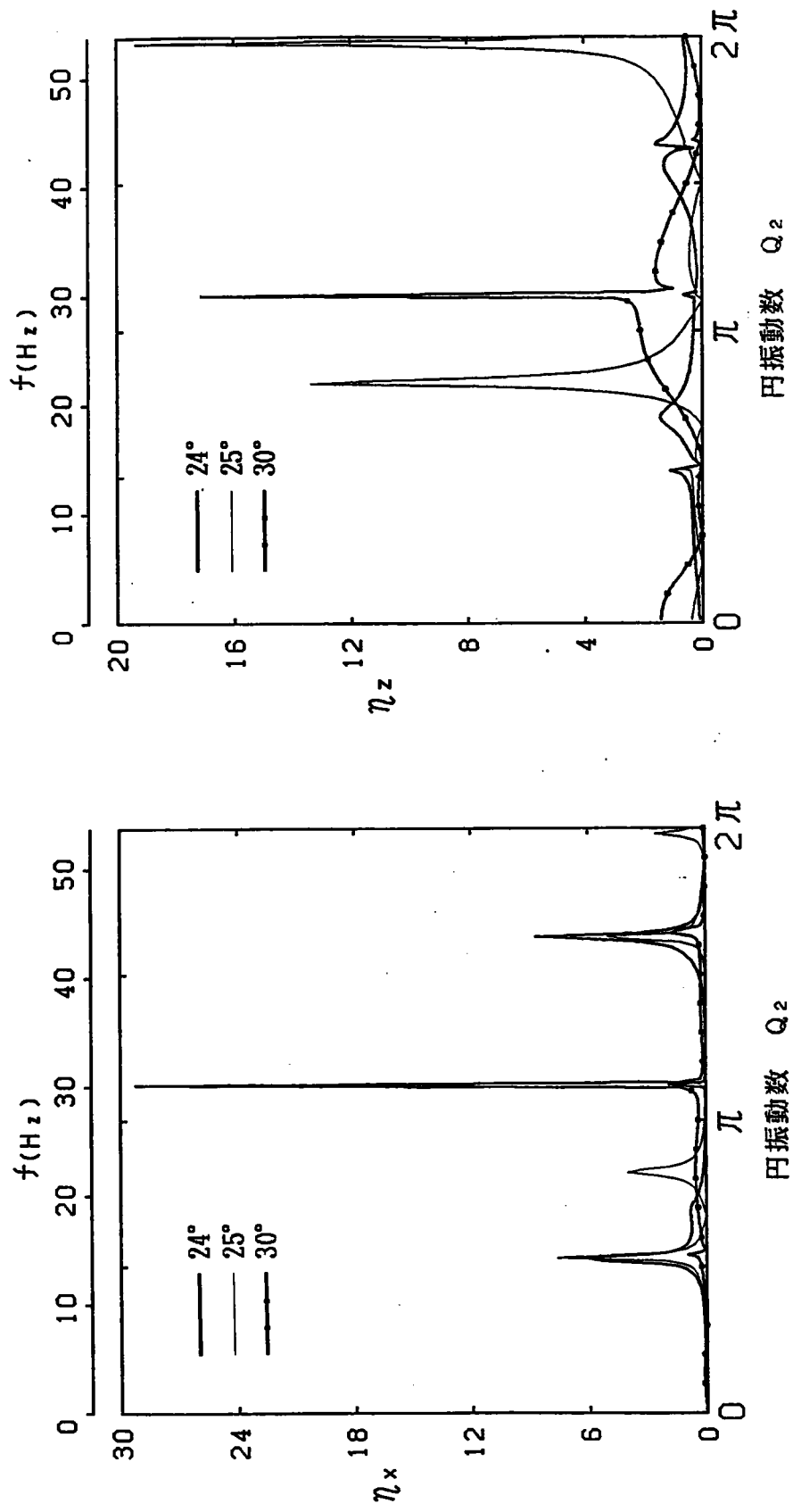


図-2.3.28(a) 地盤L6の境界(3)を滑動境界とした場合の  
振動数応答関数

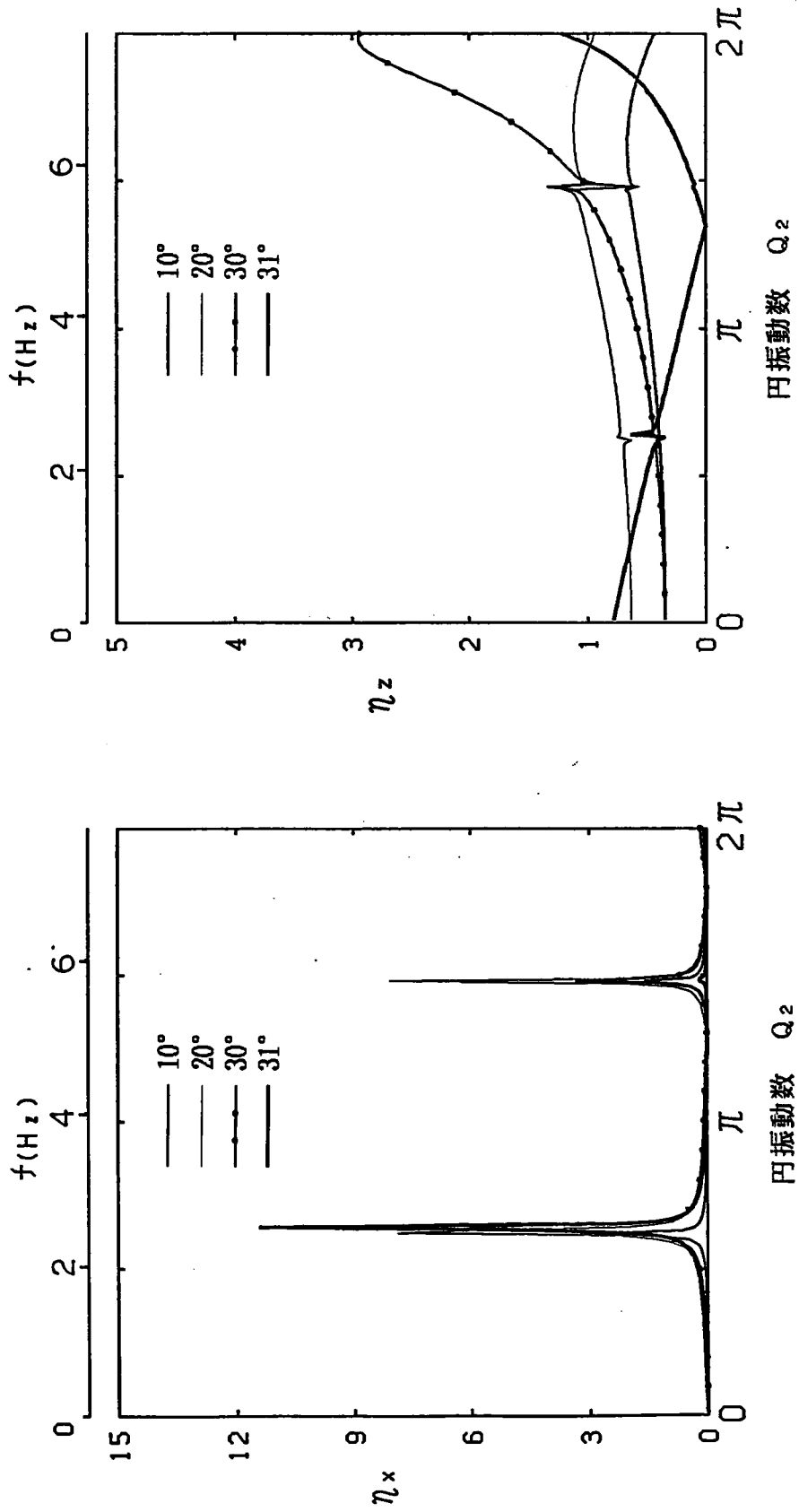
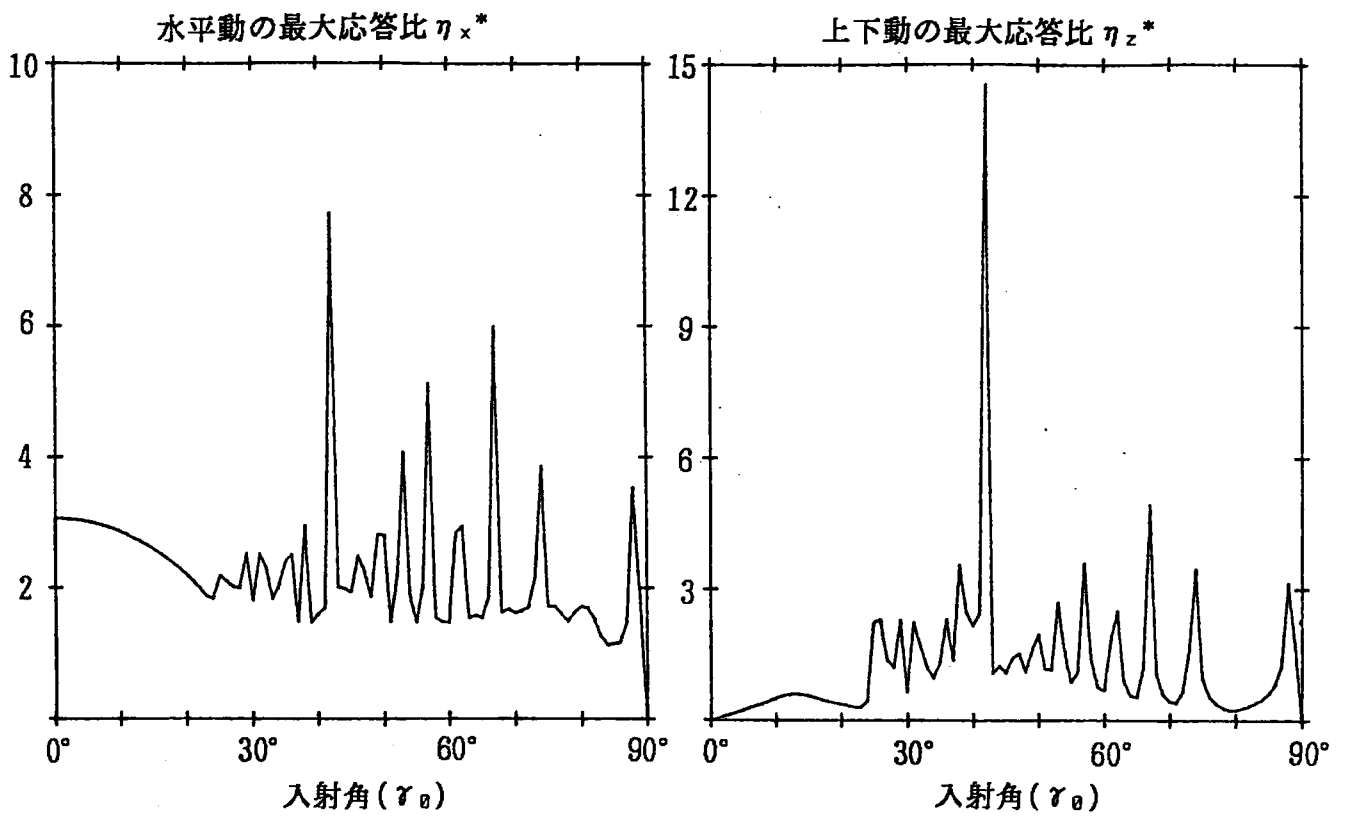
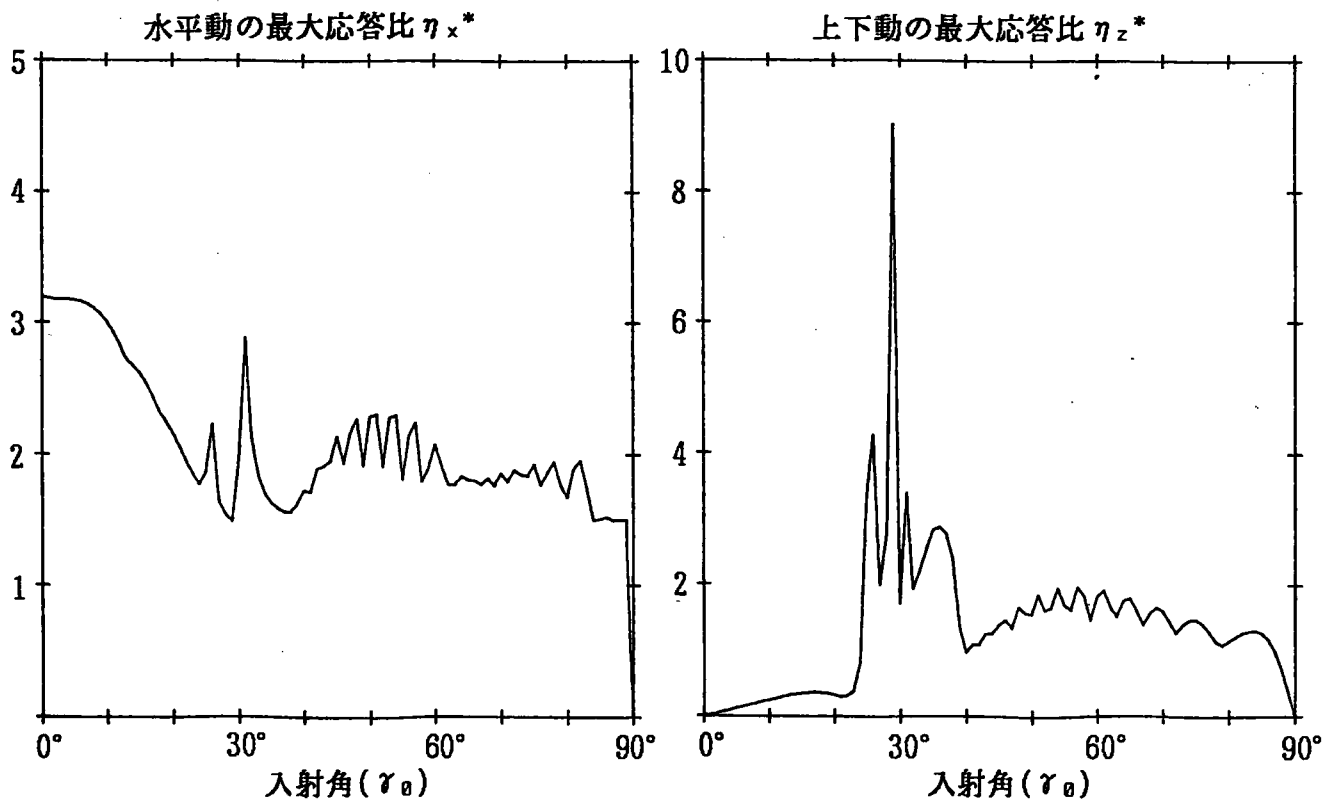


図-2.3.28(b) 地盤H24の第6層を滑動境界で置き換えた  
場合の振動数応答関数

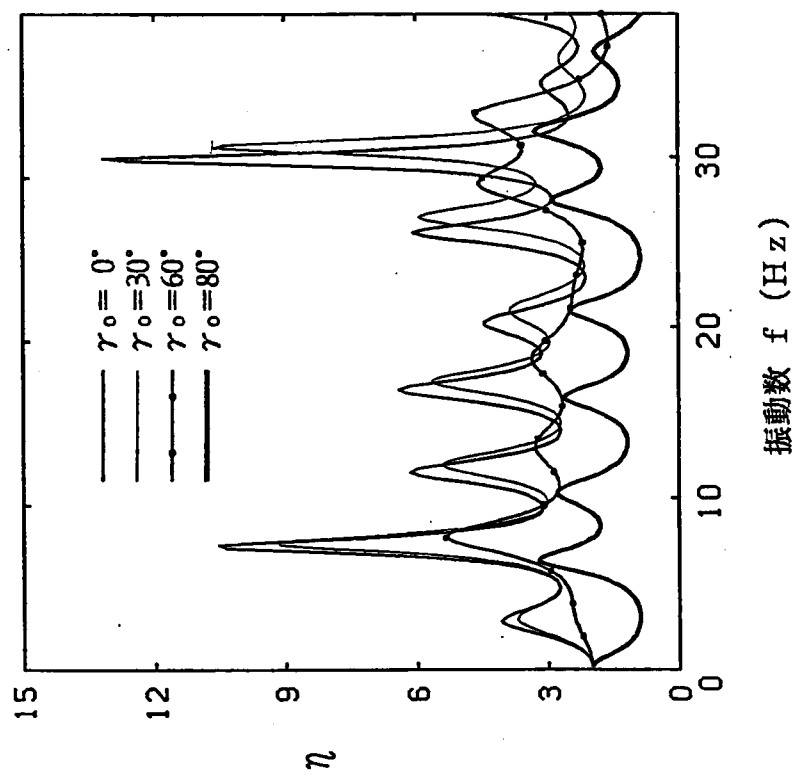


(a) 地盤L6の最大応答比 ( $\eta_1=5.35$ )

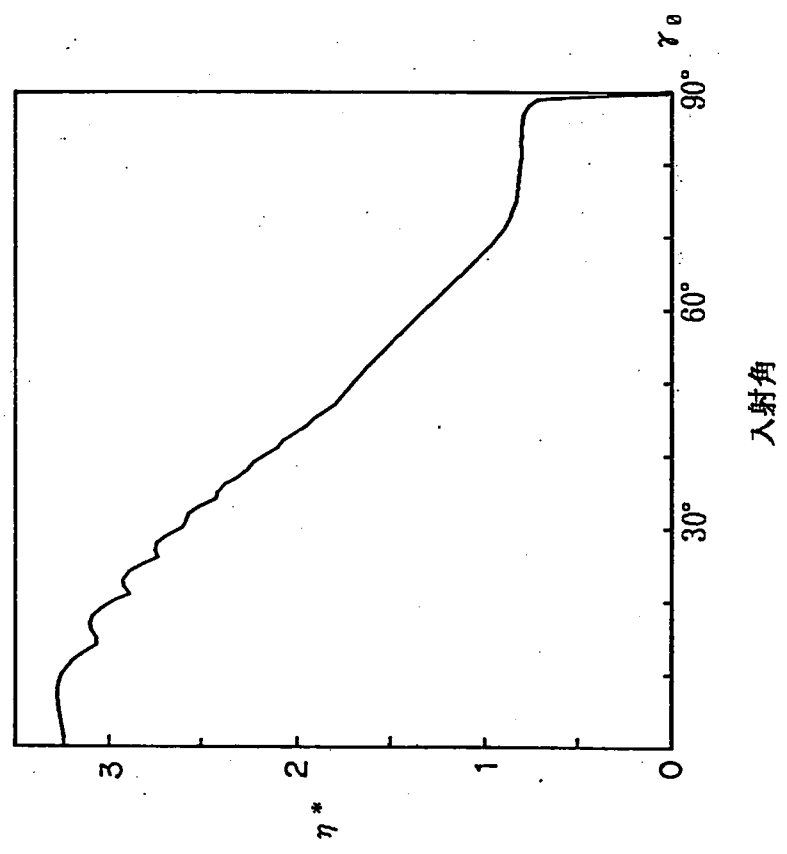


(b) 地盤L9の最大応答比 ( $\eta_1=4.07$ )

図-2.3.29 SV波入射による地盤L6とL9の最大応答比



(a) 振動数応答関数  $\eta$



(b) 最大応答比  $\eta^*$

図-2.3.30 地盤L9にSH波が入射する場合の地表の  
振動数応答関数と最大応答比  $\eta_1 = 4.07$

### 第3章 動光弾性実験

#### 第0節 緒 言

弾性媒体内の波動伝播挙動の研究に動光弾性実験が用いられた過去の経緯の概略は1. 2. 2. に述べた通りである。そこでも示したように、光弾性実験法が工学の分野で実質的に適用され始めたのは昭和の初期頃からであると考えられる。光弾性実験法の原理の概略は本章の第1節以下で述べるが、この実験法は本質的に物体内部の応力状態を視覚的に表現する極めて優れた方法であり、波動伝播研究に対して著しく効果的であることが認められている<sup>3-1, 2)</sup>。

静的な光弾性実験法が確立されて間もなく、その後Cranz-Schardin 型<sup>3-3)</sup>と呼ばれるようになった高速度写真撮影法が光弾性実験に適用され、波動伝播現象の撮影に応用されている。このことは、当時波動現象を視覚化したいという強い願望があったことを示唆していると思われる。

その後1. 2. 2. に示したように、たとえば、波動論によって予告されていた表面波の挙動を解明するために、自由境界から内部に及ぶ領域にわたって現象を表現できる数少ない便利な実験法として適用され<sup>3-3, 4, 5, 6)</sup>、また、P波およびSV波の波面を視覚的に区別すること、さらに第2章で示した境界からの反射波に両者が含まれていることを明示し、それらの挙動を究明するための多くの実験例がある<sup>3-7, 8, 9)</sup>。

最近では、動光弾性実験がモアレ法またはホログラフィー法と併用されて、たとえば亀裂の進展および亀裂先端の応力状態などの研究に用いられている<sup>3-10, 11, 12)</sup>。また、複合材料、非破壊検査の分野にも応用されている<sup>3-9, 13)</sup>。

しかし、初期においては実験のための周辺機器が現在ほど便利でなく、実験を成功させるために大変な努力と苦心が払われたであろうことは想像に難くない。現在では高速カメラおよび光源などの発達により高速度撮影法が格段に進歩し便利になっているにもかかわらず、わが国においては動光弾性実験が波動研究に応用されることが比較的少ないように思われる。そこで、動光弾性実験を用いて実際の波動現象を撮影した例を示し、この実験法の潜在的な能力を明らかにしたい。

本章の目的は、光弾性模型実験法および高速度撮影法を解説し、地盤内の波動伝播挙動を解明するために、両者を組み合わせた動光弾性実験法を適用する具体的な方法と、それによって波動挙動が視覚化される状態を簡単な例によって示すことである。特に、過去の動光弾性実験では比較的採用されることが少なかった平面波を入射パルスとする場合の特徴を述べる。

## 第1章 第1節 光弾性実験法

### 3. 1. 1. 光弾性実験の原理<sup>3-14,15,16,17)</sup>

#### 1) 光弾性縞

透明な弾性体、たとえばガラスあるいは高分子材料であるアクリライト、エポキシ樹脂等の均質等方性の平板の面内に、外力を加えて面内応力を発生させると、これらの弾性体は一時的に光学的に異方性となって双光軸結晶と同様な性質を現し、光に対して複屈折性を示すようになる。この現象は光弾性効果と呼ばれ、光弾性実験はこの効果を利用して、物体内部の応力状態を実験的に求めようとするものである。

いま、平面応力状態にある平板内の一点Oにおける主応力を $\sigma_1$ 、 $\sigma_2$ とし、光がO点において板に垂直に入射した場合を考える。このとき図-3.1.1に示すように、光弾性効果により入射光は $\sigma_1$ 、 $\sigma_2$ の直交2方向に分かれた偏光としてのみ通過できる。この2つの偏光が弾性板を通過するとき互いに位相差を生じ、位相差 $\delta$ は、位相差が主応力差に比例するという Brewster の法則により次式で表せる。

$$\delta = 2\pi d C (\sigma_1 - \sigma_2) / \Lambda. \quad \dots\dots\dots(3.1.1)$$

ここに、 $d$ は弾性板の厚さ、 $C$ は板の材料に固有な光弾性定数と呼ばれる定数、 $\Lambda$ は光が単色光である場合の波長である。なお、位相差 $\delta$ による2つの偏光間の光路差を $\Delta$ とすると、 $\Delta = \delta \Lambda / 2\pi$ である。

式(3.1.1)は2次元光弾性の基礎となる関係である。すなわち、 $\delta$ を測定することによって平板内の主応力差( $\sigma_1 - \sigma_2$ )を知ることができる。したがって光弾性実験は $\delta$ の測定を行うことと同等である。

しかし、 $\delta$ を直接測定することは容易でなく、光弾性実験を行うに当たっては通常以下の方法が用いられる。

いま、図-3.1.2のように、単色光光源から光路方向に、偏光子 $P_1$ 、弾性板 $T$ 、偏光子 $P_2$ の順に配置し、 $P_1$ と $P_2$ の偏光面を垂直にした場合を考える。

弾性板内の主応力 $\sigma_1$ の方向と $P_1$ の偏光方向の間の角度を $\phi$ とすると、 $P_1$ を通過した振幅 $A$ の平面偏光  $A \cos \omega t$ が、 $T$ 、 $P_2$ を通過して出て来るときの平面偏光は、

$$A \sin 2\phi \sin(\delta/2) \sin(\omega t + \delta/2) \quad \dots\dots\dots(3.1.2)$$

と表せる。

ここに、 $A$ 、 $\omega$ はそれぞれ入射光の振幅と円振動数である。

この平面偏光の強さ $I$ は

$$I = A^2 \sin^2 2\phi \sin^2(\delta/2) \quad \dots\dots\dots(3.1.3)$$

で表せる。

$I$ は $\delta$ の関数であるから $I$ を測定することによって $\delta$ を知ることができる。

式(3.1.3)から明らかなように、 $\phi$ を固定して $\delta$ を次第に増加するとき、 $I$ は $I = \text{MAX.}$



と  $I = 0$  とが  $\delta$  に対して交互に一定間隔で現れる。したがって、単色光による実験において主応力差が変化している場では、視野内に  $I = 0$  の部分が暗点または暗線となって現れる。また、暗線と暗線の間は  $I = \text{MAX.}$  の明線となる。この暗線と明線は縞 (fringe) または光弾性縞と呼ばれる。

結局は、 $\delta$  の値すなわち主応力差は縞次数 (fringe order) と呼ばれる光弾性縞の次数を読み取ることによって測定されることになる。

## 2) 等傾線

式(3.1.3) は  $\phi$  の関数でもあるから  $\delta$  に無関係に、 $\phi = \pi/4$  のとき  $I$  は最大となり、 $\phi = 0$  または  $\phi = \pi/2$  のとき  $I = 0$  すなわち視野は暗黒 (暗線または暗点) となる。このことは  $P_1$  の偏光面と  $\sigma_1$  または  $\sigma_2$  の方向が一致するとき、 $\delta$  に無関係に暗黒になることを意味し、この暗黒点を連ねた線は等傾線 (Isoclinic line) と呼ばれ、主応力方向の等しい点を連ねた線であるから、弾性板内の主応力方向を知るために利用できる。しかし一方では、この暗黒点は  $\delta$  に無関係であり、 $\delta$  に対して  $I = 0$  となる暗黒点と区別できないから、 $I$  を測定して  $\delta$  を求めるためにはかえって障害となる。

なお、等傾線は主方向のみに依存するから、境界条件が等しければ弾性範囲である限り材料性質および外力の大きさに無関係に得られる。

## 3) 円偏光と等色線

上述したように、主方向を示す等傾線は光弾性実験によって応力解析を行うための重要な要素であるが、一方では光弾性縞を測定する上での障害となる。そこで等傾線を除くために、図-3.1.3 に示すように、弾性板を挟んで偏光子  $P_1$  と  $P_2$  の間に、雲母の薄板などの二軸性結晶材料で作られた四分の一波長板 (以下では  $1/4$  波長板と書く)  $Q_1$  ,  $Q_2$  を挿入する。

この場合、 $P_1$  を通過した平面偏光は  $1/4$  波長板  $Q_1$  によって、その二つの主軸方向に振動する偏光に分かれ、 $Q_1$  通過後は

$$A^2 \sin^2 \delta \cos^2 \phi \quad \dots\dots\dots (3.1.4)$$

で表される楕円偏光となる。

ここに、 $\phi$  は  $P_1$  の偏光方向とこの2主軸方向の間の角度である。

2方向の偏光の位相差による光路差を  $\Delta$  とすると、

$$\phi = \pi/4, \Delta = \Lambda/4 \quad (\delta = \pi/2) \quad \dots\dots\dots (3.1.5)$$

のとき、この楕円偏光は円偏光となるから、その意味で  $Q_1$  は  $1/4$  波長板と呼ばれる。模型板  $T$  を通過後は位相差を含んだまま再び平面偏光となり、図-3.1.2 の場合と同様になる。

円偏光の場合では、入射光が単色光の場合式(3.1.3) から、光の強度  $I$  は

$$I = A^2 \sin^2 (\delta/2) \quad \dots\dots\dots (3.1.6)$$

となる。

したがって、式(3.1.6) から  $\phi$  に無関係に、すなわち等傾線の障害を受けることなく1)で述べた光弾性縞 ( $\delta$ ) が得られることが分かる。

上記の様にして光弾性縞を発生させる方法は単色フリンジ法と呼ばれる。

入射光が単色光でなく多色光あるいは白色光である場合は、 $I$  は各波長についての和となり、

$$I = \sum A^2 \sin^2(\delta/2) \quad \dots\dots\dots(3.1.7)$$

で表される。

1/4波長板は全ての  $\lambda$  について共通ではあり得ないので、大部分の波長については楕円偏光となっている。また、単色光の場合と異なり、暗線と明線の代わりに位相差  $\delta$  の等高線を表す等色線 (Isochromatic line) と呼ばれる色の縞が光弾性縞として現れる。この方法は色フリンジ法と呼ばれる。

いずれにしても、主応力差は式(3.1.1) と式(3.1.6) から求められるが、実験上得られるのは光弾性縞であるので、これらの間の関係を知らなければならない。

いま、 $\delta$  が次第に増加すると式(3.1.6) から、図-3.1.4 (a)に示すように、一定の  $I = \text{MAX.}$  および  $I = 0$  は  $\delta$  軸に沿って一定間隔に現れるから、それらを  $\delta$  の増加に対応させて縞次数と呼ぶ。そうすると  $I = 0$  すなわち  $\delta$  軸上の値は0から順に、0次、1次、2次、3次……の縞次数を持つ暗縞となって見える。またその中間も、 $I = \text{MAX.}$  の明縞の縞次数となって見え、この場合は0.5次、1.5次、2.5次、3.5次……となる。

$\delta$  と主応力差は線形関係にあるので、主応力差が直線的に増加するような断面では、主応力差と縞次数の関係は図-3.1.4 (b)のように得られる。このようにして縞次数から主応力差を求める方法はフリンジ法と呼ばれる。

### 3. 1. 2. 光弾性実験装置と測定法

#### 1) 光弾性実験装置

前項で述べたように、光弾性実験は模型板内の主応力差 ( $\sigma_1 - \sigma_2$ ) に関係する縞次数と、主応力方向 ( $\phi$ ) に関係する等傾線を測定する実験である。

図-3.1.5 (a)にこれらを合理的に測定するための、標準的な透過型の2次元光弾性光学系の装置を示す。

図-3.1.5 (a)において、 $S$  は高圧水銀灯などの点光源であって、 $S$  からの光は集光レンズ  $C$  で集められ、フィルター  $F$  を通り単色光となって第一視野レンズ  $L_1$  に投光される。視野レンズ  $L_1$  を通って平行光束になった部分に、載荷装置内にある模型板  $T$  を設置し、第二視野レンズ  $L_2$  で集光する。模型板内の映像は写真レンズ  $PL$  によってスクリーン  $S$  上に結像させる。

前記の円偏光の場を作るために、二つの視野レンズの間に模型板を挟んで、偏光子  $P_1$  ,

$P_2$  と  $1/4$ 波長板  $Q_1$  ,  $Q_2$  それぞれが図のように偏光系として設置される。

なお、注目したい視野に十分な大きさの偏光系の口径がない場合は、視野レンズの外側の集光された部分に偏光系を設置してもよい。ただし視野レンズの内部ひずみの影響がそのまま誤差となって現れるのでこの配置は避けるのが望ましい。

写真レンズ  $PL$  は通常光弾性縞を撮影するための蛇腹式の暗箱カメラに附属しており、スクリーン  $SC$  は暗箱カメラのピントガラスで、等傾線を記録するためにも用いられる。なお、等傾線を記録する場合は前記の理由で  $1/4$ 波長板を除去して行う。

図-3.1.5 (b) は本実験で用いた光弾性光学系を示す。光源  $S$  はレフレクター (反射鏡) を備えた  $Xe$  フラッシュで、ほぼ平行光束を発生する。ただし  $Xe$  管の像を散乱させるためにフラッシュ前面をすりガラス  $G$  で覆う。そのため集光レンズと視野レンズは用いず、模型板を挟んで直接偏光系を設置する。また、この系は色フリンジ法による等色線縞模様を測定することを目的とするからフィルターは使用しない。

## 2) 測定法

通常の静的2次元弾性場の実験においては、模型内の応力成分および応力分布を求めることが目的であり、前述したように等色線縞模様から主応力差、等傾線から主方向を測定し、境界条件を考慮しながら応力解析する。

以下にはこのための標準的な手順を述べる。ただし、本実験と直接関係のない部分の詳細は省く。

①光弾性実験に先立って光弾性光学系を十分調整する。このとき偏光系の偏光軸の相対位置により、模型が無応力状態のときの視野の明暗が定まるから、実験目的に沿って調整する。

表-3.1.1 に偏光系の配置と視野の明暗を示す。

②完全な偏光系を備えた光弾性光学系において、弾性模型材料から成形した模型に与えられた荷重状態を載荷装置により載荷する。このとき荷重の大きさは発生する光弾性縞の縞次数の最大値が測定に最も便利な程度になるように選ぶ。

③光弾性縞模様を乾板に撮影するか別の方法で記録する。このとき荷重の大きさを若干増減して、模型内の重要な点の縞次数を確実に判定し、記録しておく。

④2枚の  $1/4$ 波長板  $Q_1$  ,  $Q_2$  を除去し、偏光板  $P_1$  ,  $P_2$  を同時に同じ方向に適当な角度ずつ回転し、それぞれの角度でスクリーン上に現れる等傾線 (暗黒点と暗黒線) を詳細に記録する。このとき3. 1. 1. 2) で述べたように、等傾線を記録し易くするために、境界条件を変えない限り荷重の大きさ変えるか、または別の適当な模型材料を選んでも差し支えない。

この等傾線を記録することは、実際には光弾性実験の中で最も技術と経験を要する操作であり、しかも応力解析の精度に大きく影響する。しかし、本研究で対象にするような非定常な波動現象の測定では、精度が期待できないことと実験の手間がかかりすぎるために

普通行われない。

⑤上記の③，④で記録された値をもとに，模型内に設けた適当な解析線に沿って，たとえばせん断応力差積分法<sup>3-15)</sup>などを用いて各点の応力成分を解析する。

### 3) 縞次数と主応力差

すでに述べた方法で模型内の各点の縞次数が求められると，使用している模型材料の性質に対応する縞次数と主応力差の関係から主応力差が求められる。

普通この関係は次式のように，光弾性感度 (photoelastic sensitivity)  $\alpha$  (mm/kg) で示される。

$$\alpha = N / (\sigma_1 - \sigma_2) d \quad \dots\dots\dots(3.1.8)$$

ここに， $N$ は縞次数， $d$ は模型板の光路方向の厚さ(mm)である。

$\alpha$ は使用する単色光の波長 $\Lambda$ に依存するから，予め使用光と使用模型材料に対して，たとえばはりの純曲げにより校正値を求めておけばよい。

表-3.1.2 に代表的な光弾性材料の常温での材料性質を示す。

$\alpha$ の逆数を応力フリンジ値 (stress fringe value)  $f_s$  と呼んで，次式で用いる場合もある。

$$f_s = (\sigma_1 - \sigma_2) d / N. \quad \dots\dots\dots(3.1.9a)$$

また， $f_s$ に対応させて主ひずみ差に対して，ひずみフリンジ値 (strain fringe value)  $f_e$ を次式で用いることもある。

$$f_e = (\epsilon_1 - \epsilon_2) d / N. \quad \dots\dots\dots(3.1.9b)$$

このとき，応力フリンジ値  $f_s$  とひずみフリンジ値  $f_e$  の関係は，材料の弾性係数を  $E$ ，ポアソン比を  $\nu$  として，

$$f_s = E f_e / (1 + \nu) \quad \dots\dots\dots(3.1.10)$$

である。

### 第3章 第2節 動光弾性実験法と装置

#### 3. 2. 1. 動光弾性問題の分類と波動

##### 1) 力の作用時間と観察時間による分類

一般に、物体が力を受けたときの応力状態を取り扱おうとする際に二つの考え方がある。一つは力が一瞬のうちに物体全体に伝達され、釣合状態の応力分布を示すと仮定する観点である。他の一つは力を加えた点から有限な速度で波動が伝播し、これに対応する応力分布が現れると考える観点である。後者の観点で動的現象を考えるとき、動光弾性問題は以下の4分野に分けることが出来る。

- (1) 応力波伝播
- (2) 振動
- (3) 準静的過渡現象
- (4) 破壊の伝播

それぞれの分野に対して物体力を無視するとき、波動方程式は第2章の式(2.1.4a)から以下のように書ける。

$$(\lambda + \mu) u_{k,kj} + \mu u_{j,kk} + \rho f_j = \rho \ddot{u}_j \quad \dots\dots\dots (3.2.1)$$

ここに、 $\lambda$ と $\mu$ はLaméの定数、 $u_j$ は変位ベクトル、 $\rho$ は質量密度である。

(1) 応力波伝播問題においては、一般に、弾性体に加えられる荷重の作用時間が、観察する時間に比較して非常に短い。したがって、この作用時間内では粒子運動とか応力は、荷重の作用点近傍の部分に存在し、他の部分は無応力状態のままである。式(3.2.1)の慣性項 $\rho \ddot{u}_j$ がこの種の問題では動的応力状態に支配的な役割を持つ。応力分布すなわち光弾性縞模様は媒体内を応力波によって運ばれるから、第2章で示したように応力波の種類に対応してそれぞれ以下に示す速度で伝播する。

①縦波速度:  $C_L = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ ,  $\dots\dots\dots (3.2.2)$

②横波速度:  $C_T = \sqrt{(\mu/\rho)}$ ,  $\dots\dots\dots (3.2.3)$

③薄板内の縦波速度:  $C_P = \sqrt{4\mu(\lambda + \mu)/\rho(\lambda + 2\mu)}$ ,  $\dots\dots (3.2.4)$

④細い棒内の縦波速度:  $C_0 = \sqrt{(E/\rho)}$ ,  $\dots\dots\dots (3.2.5)$

⑤Rayleigh 波速度:  $C_R \doteq (0.862 + 1.14\nu) C_T / (1 + \nu)$ .  $\dots\dots (3.2.6)$

ここに、 $E$ は縦弾性係数で $\nu$ はポアソン比である。また、 $C_P$ は平面応力場に対する弾性定数の変換則<sup>3-18)</sup>を用いて $C_L$ から得られる。本論文における動光弾性実験はすべて平面応力場で行なわれていると仮定しているから、その場合にP波速度が $C_L$ と呼ばれる場合には実質的には $C_P$ を意味する。

(2) 振動の問題は、観察する時間に比較して長い作用時間の力を受ける。この場合発生する応力は作用荷重と慣性項の両者に支配される。作用荷重は周期的であり、そのため媒体の振動数の関数としての減衰特性が極めて重要になる。しかし光弾性実験においてはこ

の特性を決定することが困難な場合が多い。そのため動光弾性実験が振動問題に適用されることは少ない。

(3) 準静的問題は、式(3.2.1)の慣性項が無視できる程度に、荷重または境界の変位がゆっくり変化する場合である。たとえば、過渡的な熱応力を加えた場合がその例である。

(4) 破壊の問題では通常与えられた変位は一定で、クラックの発生により突然境界が変化する。慣性項は応力状態の変化に重要な要素である。しかし、通常等色線縞はクラックの先端と共に横波速度の30%~35%以下の速度で移動し<sup>3-1,13)</sup>、そこから発生する応力波の大きさは極めて小さく、光弾性的にはほとんど観測できない。

## 2) 媒体の幾何学的条件による分類。

本研究で取り扱う問題は、上記の分類における応力波伝播であるが、応力波伝播問題として動光弾性実験を行うとき、さらに幾何学的な考慮による区別が必要で、3種類の幾何学的分類によって応力波を区別して考える。すなわち、

- (1) 実体波(body wave),
- (2) 導波(guided wave),
- (3) 定常波(standing wave)

である。

(1) 実体波は、物体の材料性質によって定まる速度で、3次元的に伝播する式(3.2.2)と式(3.2.3)の縦波と横波がよく知られ、それぞれの実体波は特有の応力分布と速度で伝播する。したがって、それぞれに特有な光弾性縞模様として区別できる。ただし境界での反射波などのように、多数の波動が重なる場合は区別出来なくなる恐れがある。

(2) 導波は、材料性質と幾何学的形状によって定まる速度で、1次元または2次元的に伝播する。はりまたは板内の曲げ波および、式(3.2.4)または式(3.2.5)で伝播する板または棒内の縦波はそれらの代表例である。通常波動は一つ以上多数の境界で導波される。そこから生じる応力分布は導波によるものであるが、実体波が境界で反射した結果が重ね合わされたものでもある。

表面波(Rayleigh wave)は、たとえば半無限体の自由表面のように、単一の表面で導波されたものと考えられ、一般には2次元的に式(3.2.6)の伝播速度で伝播する。また、板の縁に沿って伝播する縁波(edge wave)<sup>3-1)</sup>は、3つの境界で導波され1次元的に伝播する波動である。

表面波と縁波は、第2章で示したように、SV波が特別な角度で自由境界に入射する時にも発生し、実体波とは伝播のメカニズムが異なり、非均質波(Inhomogeneous wave)と呼ばれる波動である。

(3) 定常波は定常振動であり伝播しない。しかし、これも実体波または導波が周期的に伝播および反射した結果としての応力分布と考えられる。

これら波動の幾何学的分類のうち、本研究で注目する波動は平面応力場での実体波と導

波である。

### 3. 2. 2. 高速動光弾性実験装置

ここでは、上述の応力波あるいは波動伝播現象を、光弾性的に測定する方法について述べる。

一般の光弾性模型材料においては、縦波の伝播速度は2,000m/sec以上にも及ぶことが多い。このような高速度の光弾性縞模様の変化を撮影する方法は、いくつか提案され実行されている。その方法は

(1) 高速カメラの機構を工夫して超高速の駒撮り能力を持たせる、

(2) カメラは普通で、フィルム面への露出時間、すなわち光源の閃光時間と閃光開始時間を制御して（光シャッター）高速の駒撮り能力を持たせる、

方式に大別できる。

以下にそれらの代表的な方法を紹介する。

1) 超高速カメラ：(1)の方式により、毎秒数万駒以上の撮影能力を持つカメラは、超高速カメラと呼ばれ、駒撮りカメラ (framing-camera) と流しカメラ (streak-camera) がある。

流しカメラは比較的容易に超高速撮影できるが駒撮り能力がなく、ここでは光弾性縞模様をそのままの姿で撮影できる駒撮りカメラを取り上げる。

駒撮りカメラはその機構により、①プリズム式、②ドラム式、③回転反射鏡式、④回転反射鏡式とドラム式を組み合わせた方式、のカメラに分けられる。④が最も高速駒撮り能力を持ち、 $2.5 \times 10^7$  駒/秒 (CORDIN MODEL 119) の能力を持つものまで製作されている。ただし、高速になるほど1駒当りの露出時間が短くなり、上記の場合には10 nsec ( $10^{-8}$  秒) 程度になるから、光源の光量は極めて大きなものであると同時に、撮影駒数に対応した閃光時間が必要になり、実際に撮影できる対象も限られる。

2) 電気火花と静止カメラ：1)で述べた10 nsec の露出時間でも、通常全駒数の撮影に必要な光源の閃光時間は  $1 \mu\text{sec}$  以上である。

ここで述べる方法は、(2)の方式に属し、1駒毎に電気火花(spark-gap)またはレーザーパルス(pulsed-laser)で発光させ、 $1 \mu\text{sec}$  以内の閃光時間で露出し撮影をする方法である。

被写体に焦点を合わせて静止した複数のカメラと光源の組（最高16組）を設置し、電気火花を一定または所定の遅延時間で次々に閃光させる方法は、Multi-spark camera (Cranz-Schardin Type Camera) と呼ばれている。この方式による最高撮影速度は80万駒/秒程度である。1)に比較して1駒当たりの露出時間が長いため、カメラとフィルムに齟

しい制限がなく、一般に撮影視野も広い利点がある。

3) 繰り返し入力 (荷重) 法<sup>3-2)</sup>: 1), 2) は光弾性縞模様の一連の変化を、時間経過とともに撮影することを目的としているが、この方法は (2) の方式の最も単純なもので、repeatable loading method と呼ばれ、1 台の静止カメラと閃光時間が数  $\mu\text{sec}$  以下の 1 個の閃光光源を用意し、1 回の入力に対して 1 駒撮影される。同じ入力を繰り返して閃光時間を遅延させると、入力および応答が再現性を持つなら、波動伝播による光弾性縞模様の時間経過による変化が撮影できる。

この方法は、応力波を発生させる時に再現性を保てるかどうかは鍵となるから、2) で述べた方法ほど厳密な意味での伝播挙動の撮影はできない場合があるが、定性的な結果を必要とする場合には極めて容易に、かつ撮影視野を大きく安価に行える。

特に、カメラの視野中心の位置を 1 駒毎に自由に移動することが出来るので、波動伝播の様に移動する対象を、常に視野の中心にして撮影することが可能である。これは極めて有利な条件で、光源などの制限で広い視野が得られない場合にも、必要な視野を移動することにより効果的に実験できる。

光源の閃光時間は波動の伝播速度に対応して制限されるが、鮮明な像を得るためには通常  $1\mu\text{sec}$  以下にする必要がある。しかし、閃光時間を短くすると一般に光源の光量が弱くなる。その場合にも再現性のある入力が得られれば、多重露出により鮮明な映像を得ることもできる。ただし応答が応力履歴に依存せず線型でなければならない。再現性のある現象を繰り返し発生させ、一定の遅延時間間隔で撮影を繰り返せば、50 万駒/秒以上に相当する撮影速度が得られる。

上述したように、動光弾性実験装置として重要な特性は、光源と撮影装置または入力方法にあり、それぞれ閃光時間と光量、撮影速度または再現性などの厳しい条件を満足しなければならない。また、上記の装置の中で、1), 2) の高性能のものは極めて高価で通常の実験に提供されにくい。

本研究は序論で述べた理由により、1) に述べた装置のうち、最高 12 万駒/秒の撮影速度を持つ MLD-1 型超高速カメラと、3) に述べた繰り返し入力法とを用いて、前記の波動挙動の動光弾性実験を行い、挙動解析を行うと同時に高速度撮影法の比較も行った。

### 3. 2. 3. 超高速カメラによる動光弾性実験装置

#### 1) MLD-1 型超高速カメラの原理と特徴

MLD-1 型超高速カメラは、ドラム式高速カメラと回転反射鏡式高速カメラの長所を互いに組み合わせ、最高撮影速度 12 万駒/秒、1 駒の露出時間  $1\mu\text{sec}$  以下の性能を有するカメラである。

このカメラの撮影原理は、図-3.2.1 の構造図に示すように、中心に超高速度で回転す



る4面体回転反射鏡(R.M)があり、これを中心とした円周上にそれぞれがカメラとして作用する、20個の第2レンズ群( $L_2$ )が配置してある。

被写体から発する光束は、暗室中で開放されたシャッターを通り、反射ミラー $M_0$ によりカメラ本体に入射する。この光束は上下に可動な第1レンズ( $L_1$ )を通り、スリットダイヤモンドストップ $S_1$ で山型の反射鏡 $M_1$ の両斜面に分けられ、反射鏡 $M_2$ および集光レンズ( $L_3$ )を通して、4面体回転反射鏡面上に第1実像( $I_1$ )を結ぶ。

さらに反射した光束は回転反射鏡の回転により、ダイヤモンドストップ $S_2$ を通り、第2レンズ群へ次々に入射する。フィルムは回転反射鏡の回転方向に緩速度で回転する回転ドラム(D)の縁に1周して巻かれ、第2レンズから反射鏡 $M_3$ と $M_4$ を経て入射した光束がフィルム面上で第2実像( $I_2$ )を結ぶ。回転反射鏡とドラムの回転により第2レンズ群の10倍、すなわち連続した200駒の写真撮影を行うことができる。

写真-3.2.1(a),(b)は、図-3.2.1に示した内部の一部と全体を撮影したもので、これらの写真ではドラムは見えていない。

図-3.2.2にこのカメラの機構図を示す。

MLD-1型超高速カメラの特徴は以下のようである。

(1) 被写体からの光束がいつ入射しても、20個の第2レンズ群のどれかに必ず捕捉され、カメラと現象の同期を必要としない(発光現象の場合)。

(2) 連続200駒の撮影が可能である。

(3) カメラ内の光学系の明るさは $f:9$ であり、解像力が高い。

(4) 第2レンズ群を適当な間隔で覆うことにより、1駒の露出時間を一定値に保ったまま、撮影速度のみを減少させることができる。したがって、連続撮影駒数は変化しないから、撮影可能の時間範囲を増大させることができる。

図-3.2.3は前述の第2レンズ系の使用状態の各ケースを、A~Fとして示したものである。

図-3.2.4は撮影特性曲線として、撮影速度-全撮影可能時間-運転速度の関係を、使用する第2レンズ数をパラメータとして示す。この図から現象に応じた運転速度を決めることができる。

たとえば、本研究で用いた撮影速度8万駒/秒の場合には、図-3.2.4の図中に破線で示したように、全撮影可能時間は約2.5msec、第2レンズ系の使用状態はAケースのみ可能であり、ドラムモーターとミラーモーターの運転速度はそれぞれ、600、12,000回転/分となる。また、1駒の露出時間はダイヤモンドストップのスリット幅によって異なるが、フィルム感度を考慮してbで示されるものを用いたため、約 $2.2\mu\text{sec}$ である。

表-3.2.1, 3.2.2にMLD-1型超高速カメラの性能諸元と光学系諸元を示す。

ドラムFの部分に設置するカラーフィルムは後述する発光系の制約と、良質の微粒子感光膜を得るために、ASA400のネガカラーフィルムを用いた。表-3.2.1に示されているように、必要なフィルム長は1,884mmであり、市販のフィルム長では不足する。そこで、

35mmの24枚撮り用フィルム2本を、両端が約10cmずつ重なるようにドラム周上に設置して撮影した。

前述したように、第2レンズ系の1つのレンズでは10駒の写真が得られる。写真-3.2.2に、この10駒のうち7駒が連続して撮影された状態の例を示す。

この例は、第4章で示す写真-4.2.26に対応するもので、右端の駒がその場合の $12.5\mu\text{sec}$ の写真と同一である。写真-3.2.2に示されたような一群の像が2本のフィルムにまたがって20群得られる。一群の中の相隣る像の時間間隔は、8万駒/秒の場合  $12.5\mu\text{sec} \times 20 = 250\mu\text{sec}$ である。

本実験の目的からは後で示すように、着目する視野内で約  $250\mu\text{sec}$  の間の現象が得られれば十分であるから、写真-3.2.2の相隣る2駒ずつを、20駒の第2レンズ系で得られた像から並べ直して編集すればよい。本章および第4章で示すMLD-1型カメラによる等色線縞模様写真はすべてこのようにして得られたものである。

## 2) MLD-1型超高速カメラの光源系、荷重系、光弾性光学系

### (1) 光源系

上記の高速カメラが、現象発生とカメラシャッターとの同期が不要であるのは、暗室内でシャッターを開放状態にし、所定の運転速度の最中に発光現象が発生する場合である。したがって、本研究のように、被写体自身が発光現象でない場合には現象に同期する光源が必要である。

1駒の露出時間が数 $\mu\text{sec}$ 以下である本装置の場合、可能な最高感度のフィルムを使用しても、なお強力な光源を必要とする。しかも、運転中シャッター開放という条件と、全撮影可能時間との関係から、発光時間は数 $\text{msec}$ 以下である必要がある。

実験を行った時点では、カラーフィルムの増感現像には信頼性が乏しく、しかもできるだけ微粒子の感光膜を得るために、ASA400の感度のネガカラーフィルムを使用することにした。

このフィルムに対して十分な光量を得るために、この時点で得られる最強力の光源として、閃光時間約  $1.5\text{msec}$  で  $4,800\text{Wsec}$  の能力を持つ、Xe-フラッシュランプを使用した。

この光源を用いても、Xe発光管そのものの像を散乱させるために、前面にすりガラスを置き、さらに光弾性光学系が光路中に存在するので、光量はかなり減少する。したがって光源とカメラの距離には限界があり、視野の大きさは限定される。

### (2) 荷重系

荷重系は模型板内に入射するパルス波形と密接に関係する。

すでに述べたように、パルスゼネレーターなどの任意波形を発生する装置では、適当な大きさの光弾性縞次数を発生させることが困難であり、ここで用いるような比較的硬質の光弾性模型材料に対しては、衝撃力を利用した入力方法に限られる。

衝撃的な入力方法としては、爆薬の爆発、弾丸の衝突、落錘または振子による衝撃などが考えられる。

ここでは実験回数が多く、再現性を必要とすること、暗室内での取扱が容易であること、発生するパルスの形が単純で、しかも模型の大きさから考えて十分短いパルス長を持つことなどを考慮して、空気銃弾による衝撃力を用いることにした。

空気銃弾は直径 5.5mm、重量0.98 g で、弾速は約 110m/secである。

光源との同期は、模型に接着した黄銅棒と光源の端子が銃弾を介して接触することにより同期回路を閉じて行なった。このとき、光源の閃光光量が最大となる直前に模型の着目領域に波動が到達するように調節しなければならない。

### (3) 光弾性光学系

光弾性光学系は普通の透過光用の2次元光弾性実験装置で、直径20cmの偏光板と1/4波長板で構成されている。光源のXeランプのレフレクターにより、光束が平行光路を持つ割合が大と思われるので、レンズによる集光は行わなかった。

光弾性縞模様写真として強いコントラストの像を得るために、暗視野で撮影した。

写真-3.2.3 に模型をセットした状態での光弾性光学系を示す。

上記の装置を用い、最高12万駒/秒の撮影能力に対して、1駒の露出時間と運転上の信頼性および簡便性を勘案して、全実験を8万駒/秒の撮影速度(駒間隔  $12.5\mu\text{sec}$ )で行った。このとき一駒の露出時間は  $2.2\mu\text{sec}$  になる。したがって、もし1,000m/secで移動する縞模様を考えるとこの露出時間内に模型板上で2.2mm移動する。そのためその間にある他の縞模様の縞次数が正確に判定できないとすると、縞次数に対する分解能は約5 fringe/cmとなる。また、実施した実験条件のもとでは模型板上の撮影視野は約  $6\times 16\text{cm}$  の長方形の領域である。

## 3. 2. 4. 繰り返し入力法による動光弾性実験装置<sup>3-19)</sup>

### 1) 繰り返し入力法の原理と特徴

繰り返し入力法は3. 2. 2. 3) で述べたように、波動伝播現象による等色線縞模様を、1回の入力に対して基準時間から適当に遅延させた時間毎に光源を閃光させ、1駒の写真を撮影する。この入力を繰り返し遅延時間を変えて所定の駒数を撮影し、一連の連続した駒写真に編集する方法である。

図-3.2.5 にMLD-1型超高速カメラを用いた実験装置と、本実験装置のブロックダイヤグラムを比較して示す。

この図に示すように両装置は、光弾性光学系、光源系、トリガー系、荷重系、撮影系から構成されている。

繰り返し入力法が前述の超高速カメラの系と異なるところは、撮影系、トリガー系、お

よび光源系である。

#### (1) 撮影系

光源からの距離をできるだけ短くし、しかもフィルム面上の視野を大きくするために、望遠レンズと接写リングを35mm カメラにセットして用い、ASA 1,000 のカラーフィルムに撮影した。高速カメラ系の場合に比較してこの系が極めて簡単になっている。

#### (2) トリガー系

予め設定した遅延時間後にマイクロフラッシュを閃光させる信号遅延回路、すなわちリターダーが主要部であり、 $1\mu\text{sec}\sim 1\text{sec}$ の遅延時間を $1\mu\text{sec}$ のステップで設定できるデジタルリターダーを用いている。なお、リターダーへの信号入力、は、模型の基準位置にに接着したひずみゲージから直流増幅器を経由して得た。

高速カメラ系と違い、正確な遅延発光を行う必要があるため、機械的なスイッチで同期回路を構成するわけには行かない。この系は繰り返し入力法にとって極めて重要である。

#### (3) 光源系

Xeガスを封入したマイクロフラッシュおよび電源部で、閃光時間が $0.7\mu\text{sec}$ のとき発光出力 $0.3\text{Wsec}$ である。このとき、高速カメラの場合に考えた条件のもとでの分解能は約14 fringe/cmとなる。また視野レンズを使用しないで平行光源とするために、レフレクターを持つ散光型のフラッシュを用いた。

高速カメラ系よりはカメラのレンズが明るく( $f: 3.5$ )、しかも光源から近距離で撮影できるため大光量の光源は必要としない。しかし、閃光時間が $1\mu\text{sec}$ 程度でなければならないので、必然的に光源の光量は少なくなる。

#### (4) 光弾性光学系と荷重系

高速カメラ系の場合と同様であるが、MLD-1型超高速カメラを使用して実験した場所と時期が異なるため、光学系の偏光板の直径および空気銃弾の重量とその初速度は若干異なる。

偏光板と $1/4$ 波長板の直径は30cmであり、空気銃弾は直径4.5mm、重量0.53gで、初速度は約190m/secである。

写真-3.2.4(a), (b)に実験装置全体を示す。撮影時には実験室全体を暗室とし、カメラのシャッターは開放して行い、等色線縞模様は全て暗視野で撮影した。

通常は遅延時間すなわち駒間隔を $5\mu\text{sec}$ として用いたが、等色線縞模様変化の程度に応じて、 $2\sim 10\mu\text{sec}$ の遅延時間間隔も用いた。 $5\mu\text{sec}$ 毎に撮影した場合は20万駒/秒の連続撮影速度に相当する。

この方法は、波動伝播現象のように視野内を移動する対象を撮影する場合に、常に关心的な部分、をカメラの視野中心に置き、また光源などの制限で広い視野が得られない場合にも必要に応じて視野を移動させることができ、さらに撮影時間間隔も自由に選べ、効果的に撮影できる利点がある。

## 2) 繰り返し入力法の再現性

本実験を成立させる重要な点は3. 2. 2. でも述べたように、入力と応答に再現性が保てるかどうかにある。

本実験で目的とする波動現象はほぼ弾性波動の範囲にあると考えられ、塑性または破壊のような非線形現象でなく、更に粘性などによる履歴的な応答も無視できると考えられるので、応答そのものは再現性が期待できるとする。したがって、主として入力に対する再現性を検討する。

表-3.2.3 に再現性で問題となる要因と、それらが実験結果に及ぼす影響度を示す。

この表において、再現性に対する影響力は、実験で撮影されたフィルムから現像焼付けされた等色線縞模様写真をもとにして、入射波のパルスの大きさを縞次数から、パルスの形を縞模様の分布から、パルスの伝播速度を縞模様の移動速度から読み取るときに現れるものとして考えた。

この表から、入力の大きさ、すなわち、応答縞次数に誤差が現れ易い傾向があることが分かる。室温は比較的管理し易いから、空気銃弾による衝撃入力の再現性に注意し、リターダーの遅延時間の精度が、広い範囲で十分良好であるものを選ぶ必要がある。

また撮影される等色線縞模様の映像が鮮明であるためには、波動の伝播速度に対応して、マイクロフラッシュの閃光時間を十分短かくする必要がある。これらに対して、それぞれをほぼ満足する条件で実験を行うことができた。

以下では、MLD-1型超高速カメラと繰り返し入力法を用いる動光弾性実験系を、それぞれ高速カメラ系および繰り返し入力系と呼ぶことにする。

表-3.2.3 繰り返し入力の再現性を乱す要因と程度

再現性を乱すと思われる 要因	光弾性縞から読み取られる値		
	入力大きさ (縞次数)	入力波形 (縞の分布)	伝播速度 (縞模様)
<u>空気銃弾に関するもの</u>			
銃弾初速度	◎	△	×
銃弾重量	○	+	×
銃弾の形	△	△	+
命中位置, 方向	○	△	×
<u>黄銅棒に関するもの</u>			
衝撃端の状態	○	△	×
*黄銅棒の性質	△	△	×
<u>模型板に関するもの</u>			
*接着状態	○	○	×
板厚	○	+	+
模型板の性質	△	+	○
<u>測定装置に関するもの</u>			
リターダーの精度	×	×	○
*ひずみ信号の精度	×	×	△
*光源の閃光時間	△	+	△
*フィルムの色感度	△	+	×
<u>その他</u>			
室温	△	+	◎
*写真処理	○	△	△

\*：実験室で検査，管理しにくいもの

◎：影響が大きい

○：影響がある

△：やや影響がある

＋：影響がないとは言えない

×：影響を無視できる

### 第3章 第3節 光弾性模型材料

#### 3. 3. 1. 模型材料の選定

光弾性模型材料としてよく使用されるものは表-3.1.2 に示した。一般に光弾性材料の性質として重要な性能は以下のである。

- (1) 透明，等方均質であること。
- (2) 応力-ひずみ関係と応力-光弾性定数関係が広い範囲で線形であること。
- (3) 実験目的にあった適当な光弾性感度を持つこと。一般には光弾性感度の高いものが望まれる。
- (4) 適当な大きさの弾性係数を持ち，加工が容易なこと。
- (5) 力学的および光学的クリープが少ないこと。
- (6) 時間縁効果 (time edge effect) が少なく，もし入っても無応力状態を容易に設定できること。
- (7) 素材が容易にかつ安価に得られること。

上記の性質を比較的良好に満たし，しかも実験室で母剤から容易に製作でき，安定して供給できることを考慮して，本研究ではポリ付加型のエポキシ樹脂<sup>3-20)</sup>を用いた。

なお，第2章で示したように，非均質場の波動挙動で重要な媒体の性質の一つは，特性インピーダンスであり，特に本研究で対象にする地盤模型においては，これを任意に変化できることが望まれる。以下に述べるように，エポキシ樹脂母剤に硬化剤を混合して模型板を作成する際に，適当な種類の硬化剤と添加剤を配合することによって，この特性インピーダンスに相当する材料性質をある程度任意に変えることができる。

#### 3. 3. 2. エポキシ樹脂模型材料の種類

本研究で用いた動光弾性実験のための模型材料は，以下に述べるE p - I，II，IIIの3種類である。いずれもエポキシ樹脂を母剤とし，硬化剤の種類と添加剤の配合比によって材料特性を変えることができる。

E p - I は商品名がアラルダイト B (CT200) と呼ばれるもので，硬化剤 (HT901) と混合し約 120℃の恒温炉内で12時間養生し，高温硬化させて作成する。

この材料は，前項で述べた光弾性材料として要求される諸性質を満たす。特に，時間縁効果によって初期応力が導入されても，実験室で 120℃から徐冷による焼鈍 (anneal) をして比較的簡単に除去することができる。

わが国では従来から光弾性模型材料として広く用いられており，本実験では第4章以下で述べる地盤模型の全部または大部分を構成する基本材料として用いた。

E p - II，IIIは商品名がアラルダイト D (CY230) と呼ばれるものを母剤とし，添加剤と

してチオコール (LP-3) をそれぞれ母剤に対して重量比 3/4, 1/1 で混合し、ジエチレントリアミンを硬化剤 (HY956) とし、約50℃の恒温炉内で20時間養生し、低温硬化させて作成した。

これら2種類の模型材料E p - II, IIIは、非均質地盤模型の低い特性インピーダンスの層を形成する材料として、E p - I の模型板に部分的に設置して用いた。

ただし、これらの材料はE p - I とは硬化温度が異なるため、一旦設置した後でどちらかの材料に初期応力が導入されても焼鈍によって除去することはできない。

表-3.3.1 に、それぞれの模型材料の配合比を示す。

表-3.3.2 に、多数の動光弾性実験で得られた結果をもとに求めた波動特性を示す。この表には特に非均質地盤模型で必要な、臨界角および特性インピーダンス比を示した。

なお、次節3.4.1. で述べるように、高速カメラ系と繰り返し入力系とは模型材料の作成時期が違いため材料特性にも若干違いがあり、ここに示した値は高速カメラ系の値である。

表-3.3.1 模型材料の配合

	エポキシ樹脂	重量比	硬化剤	重量比	添加剤	重量比
E p - I	CT200	100	HT901	30	—	—
E p - II	CY230	100	HY956	20	LP-3	75
E p - III	CY230	100	HY956	20	LP-3	100

表-3.3.2 模型材料の動特性 (12℃)

模型材料	縦波速度 $C_P$ (m/s)	横波速度 $C_T$ (m/s)	表面波速度 $C_R$ (m/s)	密度 $\rho$ (t/m <sup>3</sup> )	動ポアソン比 $\nu_d$	動弾性係数 $E_d$ (kg/cm <sup>2</sup> )	臨界角 $\theta_c$	$\rho C_T$ 比 $Z_T$
E p - I	1,960	1,090	1,020	1.27	0.38	42,500	33.8°	1
E p - II	1,100	580	550	1.22	0.44	12,100	31.8°	0.51
E p - III	860	450	430	1.22	0.45	7,300	29.2°	0.40

$C_P$ : 板内のP波速度,  $C_R$ : Rayleigh 波速度,  $\rho C_T$ 比: 特性インピーダンス比



### 第3章 第4節 動光弾性実験の入力波形と等色線縞模様

#### 3. 4. 1. 入力波形と基準模型

波動現象を対象にする場合の動光弾性実験上の入力は、入力レベルあるいは波形について多くの制限がある。特に、入力波として平面応力波を発生させる必要がある場合には一層制限が厳しくなる。

ここでは、3. 2. 3. 2) (2) でも触れたように、

- (1) 入力波が比較的単純なパルス波形で、
- (2) 発生する縞次数が十分大きく、
- (3) 模型の大きさに比較して十分短いパルス長

の平面波が入射するという条件の範囲で、できるだけ単純で再現性のある方法で得られる入力方法を求めた。

図-3.4.1 に上記の条件を満足する平面入射波を得るための入力方法を示す。

この入力法は走行荷重法とも呼ばれ、波動の伝播速度の大きい媒体と伝播速度の小さい媒体を互いに平面境界で接着し、高伝播速度媒体内を波動が伝播すると、両媒体の境界から低伝播速度媒体内に、head wave<sup>3-21)</sup>の原理で縦波(P波)と横波(SV波)が平面波として伝播する現象を利用した方法である。

いま、模型板のCD辺に高伝播速度媒体としての角棒LRを接着し、角棒の一端Lを空気銃弾で縦衝撃すると、低伝播速度媒体である模型板内にP波およびSV波が平面波となって伝播する。

このとき角棒とP波およびSV波波面がなす角度を、それぞれ $g_P$  および  $g_T$  とすると、

$$g_P = \sin^{-1}(C_P/C_0), \quad g_T = \sin^{-1}(C_T/C_0) \quad \dots\dots\dots (3.4.1)$$

である。

ここに、 $C_0$  は角棒を伝播する縦波の伝播速度であり、 $C_P$  ,  $C_T$  はそれぞれ模型板内のP波とSV波の伝播速度である。ただし  $C_P \leq C_0$  でなければならない。

したがって、P波とSV波それぞれが独立に入射する状態を設定するには、入射パルス長と波面間の角度、および注目する領域までの伝播距離を慎重に考慮する必要がある。

しかし模型境界では、入射横波は先行する入射縦波による反射波の影響を避けられず、P波またはSV波のみが独立して入射する実験としては、この入力法にも限界がある。

3. 2. 4. でも述べたように、実験装置として、高速カメラ系と繰り返し入力系とは、基本的にはほとんど差がないが、荷重系と模型材料の性質が少し異なるので、以下では両者を比較しながら説明する。特に説明なしに一方の数値または記号のみを示す場合には、高速カメラ系および繰り返し入力系に対する値には、それぞれ右肩に添え字HおよびRを付けて区別する。

## 1) 基準模型

本研究で対象にする地盤模型について、上記の平面入射波に対する波動応答の全てを調べるための基準となる模型を、基準模型 $S_0$ と呼ぶ。

図-3.4.2 (a), (b)に、それぞれ基準模型 $S_0^H$ と $S_0^R$ の全体を示す。また、写真-3.4.1 (a), (b)にそれぞれ高速カメラ系と繰り返し入力系の模型の例を示す。

$S_0^R$ の黄銅角棒を $S_0^H$ のそれより太くしてあるのは、 $S_0^R$ の縦衝撃の繰り返し回数の方がはるかに多くなることを考慮しているためである。

基準模型 $S_0$ は式(3.4.1)を考慮して、高伝播速度媒体を黄銅角棒とし、低伝播速度媒体をE-Iの板として作成された。この場合 $C_0=3,600\text{m/sec}$ である。

基準模型 $S_0$ は以下の諸条件をできるだけ満足するように設定されている。

(1) 走行荷重により発生する2種類の入射パルス波の波面の間の距離は、黄銅角棒から着目点までの距離の増加と共に増加するが、着目領域内ではそれぞれの入射波のパルス長から考えて、おのおのの入射波が独立して存在し得ると考えられる程度に離れていること。

(2) 実験目的である境界以外の境界あるいは隅角からの、反射波または散乱波が着目領域に達するまでの時間が十分長いこと。

(3) 模型材料が有する内部摩擦による入射波の減衰と波形の変化が比較的少ないように着目領域までの距離を選べること。

(4) 模型板を鋳型するための装置の大きさと重量が実用的な範囲にあること。

(5) 光弾性縞次数が適当な値であるような入射パルス波の振幅が得られること。

これらの要請は互いに矛盾する面を持っており、それぞれを完全に満足することは極めて困難である。しかし、本研究においては多数の予備実験と装置の改良により、ここで選んだ模型を使用してほぼ満足できる結果を得た。

$S_0$ は黄銅角棒のL端を縦衝撃するとき、自由境界AB辺へ入射SV波が垂直入射するように成形されている。またR端を縦衝撃するとき、AB辺へは臨界角を僅かに越えた入射角でSV波が入射することになり、第2章で述べた表面波が発生するから、この場合も興味ある波動現象を観察できる。要するに一模型について、L端およびR端を縦衝撃すると、SV波がAB辺に平行な自由境界へ垂直入射する場合と、臨界角をやや越えて入射する場合の実験結果が得られる。

なお、以下では黄銅角棒のL端およびR端を縦衝撃する場合を、それぞれL端衝撃およびR端衝撃と呼ぶ。

図-3.4.3 に $S_0^H$ に対するL端衝撃およびR端衝撃の場合のP波、SV波の波面の角度とAB辺への入射角を示す。

図-3.4.4 (a), (b)に、 $S_0^R$ をL端衝撃およびR端衝撃する時に、着目領域の中心である自由境界のO点へ、入射SV波が入射する時間における反射波波面の位置を示す。ただし、たとえばSV波入射によって生じる反射P波をSPなどと表す。この図に示されている波面は主要なもののみであり、パルスの最大縞次数が極めて低いと考えられる波面は

省いてある。また波面は全て境界に達する直線として示されているが、実際には境界付近では表面波、隅角点からの円筒波およびhead wave など様々な波面が存在し、それらの重ね合わせにより直線とはならない。

図-3.4.4 (b)から、R端衝撃の場合に入射SV波がO点に達した後、O点近傍に現れる反射波は、AC辺からのPP, PSおよびCD辺からのSSSの順である。最も早いPPは約 $30\mu\text{sec}$ 後に達するがその縞次数は無視できる程度である。やや高い縞次数を持つPSとSSSは約 $100\mu\text{sec}$ 後に達する。

## 2) 高速カメラ系の入力波形

以下には上記基準模型に対する実際の入射パルス波形を示す。

図-3.4.5 ~3.3.7 に模型 $S_0^H$ の測点I, II, Oにおける動ひずみ測定結果を示す。

図-3.4.5 (a)はR端衝撃の場合の測点Iのひずみ波形を、SV波が到達するまでは先行するP波の入射方向を一つの軸方向とする直交2軸のひずみを、SV波到達後はSV波入射方向に対して $45^\circ$ をなす直交2軸のひずみを示す。したがって、それぞれの入射パルス波のみが存在する時間内では、それぞれの入射波の主ひずみを表している。

図-3.4.5 (b)には、これらから得られる主ひずみ差も併せて示し、動光弾性実験の縞次数分布と比較し易いようにした。

図-3.4.5 (b)の測点Iにおける主ひずみ差の入射パルス波形から、本実験で用いた空気銃弾衝撃で得られる入力波形は、衝撃パルスとしての典型的な形を持っており、パルスの立ち上がり時間が約 $10\mu\text{sec}$ で、主要部の継続時間が約 $50\mu\text{sec}$ であることが分かる。また、測点Iには主ひずみ差で考えて、最初ピークの小さいP波パルスが入射し、次いでこのピークの約3倍のピークを持つSV波パルスが入射する。

図-3.4.6 (a), (b)はL端衝撃の場合の測点IIにおける主ひずみと主ひずみ差波形を示す。

以上の結果から、測点II付近ではP波とSV波のパルスがそれぞれ独立に入射すると考えてよいこと、またSV波パルスの波面が到達後約 $70\mu\text{sec}$ まではAB辺からの反射波の影響を受けないことが明かである。

図-3.4.7 (a), (b)は、自由境界上にある測点Oの接線方向の直ひずみを、L端衝撃およびR端衝撃に対して示した。

## 3) 繰り返し入力系の入力波形

図-3.4.8 に、基準模型 $S_0^R$ に対して弾速約 $190\text{m/sec}$ 、弾丸重量 $0.53\text{g}$ の空気銃弾でL端衝撃を行ったときの、測点Qにおける主ひずみ差で表した入射SV波のパルス形を示す。なお、この図には後で述べる縞次数によるパルス形もあわせて示している。

この図より、入射SV波のパルス形は2)の高速カメラ系の場合とほぼ同じであることが分かる。

### 3. 4. 2. 等色線縞模様

#### 1) 応答応力と波動挙動

動光弾性実験によって得られる等色線縞模様写真には、すでに述べたように極めて多数の情報が含まれている。本研究はこれらの情報の中から、定量的には応答応力を、定性的には波動挙動を選別し、解析することを目的としている。

通常の静的光弾性実験においては、等主応力差線（等最大せん断応力線）を表す等色線縞とその縞次数、および主方向が等しい点を連ねた線を表す等傾線を記録し、せん断応力差積分法などにより応力成分を求める。しかし、動光弾性実験、特にここで対象とするような非定常な波動実験においては等傾線を正確に記録することは極めて困難であり、等色線の縞次数分布すなわち等色線縞模様のみを記録の対象とするのが普通である。

本研究でも等色線縞模様を等色線縞模様写真としてカラー撮影した。

応答応力については、縞次数から模型内部では最大せん断応力の分布が得られ、自由境界では直接垂直応力の分布が得られる。このとき、等色線縞をカラー撮影しているので、波動伝播にともなう複雑な等色線縞模様に対する縞次数の分布を、隣り合う色の序列から確実に判別できる。したがって、等色線縞の色と縞次数の対応をつけておけば、応力の相対値が分かる。そのため、本研究では応答応力を表すとき、縞次数の絶対値と入射SVパルスのピークの縞次数 ( $N_0$ ) で基準化した相対値を必要に応じて用いる。ただし、写真処理の過程で色調が必ずしも一定でない場合があり、しかも色の識別には個人差も入り易く、縞次数の読み取り値に誤差が含まれることは避けられない。

表-3.4.1 に縞次数読み取りの目安のために、等色線縞の色と波長および縞次数の対応を示す。

表-3.4.1 等色線縞の色と波長と縞次数の関係

色	紫	青	緑	黄	橙	赤
波長( $\mu\text{m}$ )	0.38 ~ 0.43 ~ 0.49 ~ 0.55 ~ 0.59 ~ 0.64 ~ 0.78					
縞次数 (N)	( 0 )	0.17	0.33	0.5	0.67	0.83
	1	1.17	1.33	1.5	1.67	1.83
	2	2.17	2.33	2.5	2.67	2.83

0次は正確には暗部となり、紫から赤の1サイクル毎に1次ずつ縞次数は増加する。また、この表において各色の間隔すなわち整数次の縞次数の間の次数は適当に補間したものであり、厳密には各色に対応する波長に比例していない。

波動挙動については、模型内の注目している領域で発生または通過する平面波、円筒波としてのP波、SV波、またはその様な波面を形成しない境界波、表面波などを識別する

必要がある。複雑な現れ方をする等色線縞模様からそれらを識別するために、主として以下の識別法を用いた。

(1) 波面と伝播方向が明らかな場合：それぞれの波動に固有の伝播速度と縞模様の伝播速度を比較する。

(2) 境界に対する入射角が明らかな場合：Snellの法則から透過または反射角と波面を形成する縞模様を比較する。

以下に基準模型の波動応答を例に、等色線縞模様写真の読み取り方の例を示す。

## 2) 高速カメラ系の場合

この場合の等色線縞模様写真は、L端衝撃およびR端衝撃共に視野右方から衝撃した結果であり、写真視野では常に右下から左上に向かって伝播する入射波面が現われる。また、高速カメラ系の場合は写真-3.2.2 に示したように、撮影視野が  $6 \times 16 \text{ cm}$  のかなり細長い長方形であるにもかかわらず、カメラの都合で視野は長方形の鉛直・水平の直交2方向にしか設定できないから、多少不便であるが視野の都合によっては模型を傾け、同時に衝撃方向も黄銅棒に平行になるように行なった。

### (1) L端衝撃

写真-3.4.2 は基準模型  $S_0^H$  をL端衝撃した場合の、O点を含む幅約  $6 \text{ cm}$ 、高さ約  $16 \text{ cm}$  の長方形領域の等色線縞模様写真である。この写真は写真-3.2.2 に示したような20群の連続した駒の中から、必要な駒を切り出して時間順に編集して得られたものである。

写真中に示す時間 ( $\mu \text{ sec}$ ) は、視野に最初の波面が現れる時間を  $0 \mu \text{ sec}$  として、8万分の1秒  $= 12.5 \mu \text{ sec}$  毎に示してある。また、写真中の正方格子の間隔は  $2 \text{ cm}$  である。以下に示す写真も全て同様である。

写真-3.4.2 において、図-3.4.3, 3.4.4 を参照すると、 $12.5 \mu \text{ sec}$  から明瞭に見え始める右上がりの直線波面で、これに直交する右下方向に向かって、青→橙→青と変化する縞模様の部分が、前述の入射平面P波のパルスを表す等色線縞模様である。また、 $25 \mu \text{ sec}$  以後明瞭に見え初め、P波波面の勾配より小さい勾配の直線縞模様を持つ濃い色調の部分が、入射平面SV波のパルスを表す等色線縞模様である。この濃い色調は多数の縞模様が狭い幅の中に分布しているためで、パルスの形が鋭く変化し、しかもピークの縞次数が大きいことを示している。 $62.5 \mu \text{ sec}$  以後では波面に近い部分で等色線縞が波面に平行に分布していることが明瞭になって来る。

図-3.4.9 (a), (b)に、これらの縞次数を注意深く読み取り、表-3.4.1 に示した色と縞次数の対応関係を用いて、前述の測点位置付近にP波とSV波パルスのそれぞれのピークが到達したときの、波面に垂直な方向（伝播方向）の縞次数  $N$  の分布を示す。これらは縞次数で表現されたP波とSV波の入射パルス波形であり、SV波とP波のピーク縞次数比はこの場合  $N_s/N_p = 2.53/0.8 = 3.16$  である。一方、図-3.4.5 (b)に示した主ひずみ差から求めた、対応するピーク比は  $\epsilon_s/\epsilon_p = 1,760 \times 10^{-6}/560 \times 10^{-6} = 3.14$  であるから、

両者はパルス波形と共によく一致している。以下では高速系における入射SV波のピーク縞次数を $N_0^H=2.53$ とする。

また、これらの値から式(3.1.9b), 式(3.1.10)および表-3.3.2 の値によって、動的なひずみフリンジ値 $f_e$ と応力フリンジ値 $f_s$ を求めると、それぞれ

$$f_e=306 \times 10^{-6} \text{ cm/fringe}, \quad f_s=9.4 \text{ kg} \cdot \text{cm/fringe}$$

となる。

写真-3.4.2 において、入射P波は $62.5 \mu\text{sec}$  と  $75 \mu\text{sec}$  の間で視野内の自由境界に達する。 $75 \mu\text{sec}$  から  $100 \mu\text{sec}$  にかけて、自由境界から下方に移動する2種類の波面が識別できる。一つは視野内でほぼ水平な暗線となつて下方に先行して移動する波面であり、もう一つは、やはりほぼ平行で橙色の等色線縞を持ち前者に遅れて進行する波面である。

図-3.4.4 (a)に示されている波面の関係性を参照し、正確に測定した波面の角度および伝播速度から、前者が反射P波(PP)であり、後者が反射SV波(PS)であることが確かめられる。

また、基準模型 $S_0^H$ のAB辺の角度を決定するときに意図した通り、 $150 \mu\text{sec}$  と  $162.5 \mu\text{sec}$  の間でSV波波面が自由境界に平行に入射しており、同振幅で逆位相の反射波と重なりあつて消波されている状態が明瞭に示されている。

## (2) R端衝撃

写真-3.4.3 は基準模型 $S_0^H$ をR端衝撃した場合の、O点を含む自由境界に長辺が沿う長方形領域の等色線縞模様写真である。この場合はAB辺が視野内で水平になるように傾けて衝撃した例である。図-3.4.4 (b)を参照すると以下のように説明される。

この写真では、 $12.5 \mu\text{sec}$  以後で入射P波を示す縞模様はややコントラストが弱い、自由境界からの反射SV波(PS)は極めて明瞭であり、そのピーク縞次数は写真-3.4.2 の場合より明らかに大きい。また $75 \mu\text{sec}$  から現れる入射SV波波面と自由境界との交点付近に現れる球根状の縞模様が極めて特徴的である。この縞模様は縦波が臨界角を越えて入射( $\gamma=36.4^\circ$ )したために発生した表面波に起因するものであり、この球根状の縞模様を含む自由境界側が表面波の主要部分を形成し、自由境界の縞次数は急激に増加している。ただし、球根状の縞模様の部分では入射SV波と反射SV波とが重なりあつて、表面波そのものの存在を示す縞模様は明かでないが、反射SV波波面と自由境界の間で暗線で区切られ膨らみを持つ縞模様の部分が表面波を示す縞模様である。この縞模様については繰り返し入力系による等色線縞模様写真でより明らかにされる。

なお、第2章で述べた理由により、ここでの表面波はRayleigh波と同じ性質の波動ではない。

図-3.4.10, 3.4.11に、写真-3.4.3 から読み取ったO点の縞次数の時間変化と、O点を含む自由境界に沿う縞次数分布を示す。

図-3.4.10と自由境界のO点の直ひずみを示す図-3.4.9 を比較すると、縞次数と垂直ひずみについて、SV波とP波パルスのピーク比はそれぞれ、 $N_s/N_p=1.8/1.0=1.8$  ,

$\epsilon_s / \epsilon_p = 1,380 \times 10^{-6} / 770 \times 10^{-6} = 1.79$  となりほぼ等しい。

### 3) 繰り返し入力系の場合

以下に示す等色線縞模様写真は、1 衝撃で 1 駒ずつ得られた写真を時間順に並べて編集したものである。この場合の視野は直径約 9cm の円形であるため、模型は常に一定の方向に設置している。

写真の各駒に示されている時間は、図-3.4.2 に示したトリガーゲージのある M 点に、縦衝撃による黄銅角棒内の縦波が到達した時間、すなわちリターダー（遅延回路）への信号入力が始まった時間を基準（0  $\mu$ sec）にしている。ただし、マイクロフラッシュ自身の応答遅れ時間が約 11  $\mu$ sec ある。また、視野内の正方格子の間隔は全て 1 cm である。

繰り返し入力系の等色線縞模様写真では、L 端衝撃および R 端衝撃いずれの場合も、写真視野の左下から右上に向かって入射波が進行するように撮影されている。

ここでは、高速カメラ系と比較する意味で R 端衝撃の場合のみを検討する。

#### (1) R 端衝撃

写真-3.4.4 は基準模型  $S_0^R$  を R 端衝撃した場合の等色線縞模様写真である。

30  $\mu$ sec で自由境界と交差する白い縞（約 0.3 次）の波面として入射 P 波が右上へ向かって伝播し、またその交点から左下に伸びる波面（最大縞次数約 0.5 次）を持つ反射 SV 波（PS）が右下に向かって伝播する。

40  $\mu$ sec 以後から視野下部にピーク縞次数 1.83 の入射 SV 波が見えはじめる。この最大縞次数は以下に示す他の等色線縞写真でもほぼ等しいので、O 点近傍の縞次数分布を考える時の入射 SV 波パルスのピークの縞次数の基準値を  $N_0^R = 1.83$  とする。また、以下では  $N_0^R$  に対応する最大せん断応力を  $\tau_0^R$  とする。

70  $\mu$ sec から自由境界 AB で SV 波が入・反射する状態が視野に現れる。70  $\mu$ sec 以後の各駒では、入射 SV 波のパルス形が最初のピーク後に第 2、第 3 のピークを持つ形であることを明瞭に示している。このことは先行する PS の縞模様にも現われている。

90  $\mu$ sec 以後の等色線縞模様写真では、自由境界上で入射 SV 波とその反射 SV 波が交差する点の自由辺からやや下方で、中央の最大縞次数が 2.3 となる同心長円状の等色線縞模様が現れる。これは高速カメラ系の場合にも述べた、SV 波が臨界角を越えて自由辺へ入射する場合に発生する極めて特徴的な縞模様である。

この写真において、高速カメラ系の場合に述べた表面波そのものの縞模様は、やはり反射 SV 波波面と自由境界の間で暗線で区切られてほぼ半円形に見える領域の縞模様として示されている。この写真の場合には暗線が自由境界まで届いていることが明かであり、第 4 章で示すように表面波の縞模様による現れ方の特徴である。

105  $\mu$ sec 以後の視野にかなり明瞭に見える、最大縞次数約 0.7~0.8 の反射 SV 波の波面が、入射波の後端部と干渉して周期的に切れ切れに見え、入射パルスの後端部の振動的な部分の効果が現われている。

図-3.4.8 に、模型  $S_0^R$  の測点 Q 付近で読み取った、入射 S V 波の伝播方向の縞次数分布を前記の主ひずみ差に併せて示す。横軸は伝播速度から換算した時間軸を示している。縞次数変化から求めたパルス形は、最初のピークに続いて約  $10 \mu\text{sec}$  間隔で次第に小さくなりながら第 2、第 3 のピークを持つ。

繰り返し入力系は高速カメラ系の場合と荷重系が相違するため、ひずみおよび縞次数のピークの値は異なる。しかし入射 P 波および S V 波のパルスの主パルス形は、立ち上がり時間および全体の継続時間共に、高速カメラ系の場合とほぼ同じであると判断される。

図-3.4.12 は、ここには示していないが L 端衝撃の場合に対して、入射 S V 波パルスのピークの縞次数と伝播距離の関係を示す。反射波の伝播距離は自由辺からの反射後の距離を加えて示した。この図は伝播距離とともに粘性減衰によりピーク縞次数が減少することを示す。

以上、2) および 3) で述べた高速カメラ系と繰り返し入力系の等色線縞模様写真を比較すると、基準模型に現われる応答と写真について以下のようにまとめられる。

- ① 黄銅角棒断面の辺長と模型の板厚の差の少ない高速カメラ系の方が、入射パルスのピークが大きく、それにもなってピーク縞次数は繰り返し入力系のそれより約 40% 大きい。
- ② 黄銅角棒から自由境界の点 O までの距離が短い繰り返し入力系の入射パルスは、伝播過程における粘性減衰が少なく、パルスのピーク以後にかなり周期的な振動成分が残っている。ただし、この振動的な成分は黄銅角棒断面の辺長と板厚の差が大きいため効果であると推定される。
- ③ 等色線縞模様写真の鮮明さは、レンズ系の能力が優れ、露出時間の短い繰り返し入力系の方が優っている。
- ④ 高速カメラ系は視野が細長い長方形で固定されているため、観察するパルス長によっては現象解明に当たって不便なことが生じると予想される。
- ⑤ S V 波が臨界角を越えて自由境界に入射する場合 ( $\gamma_0 \leq \gamma \leq 45^\circ$ ) の、入射 S V 波面、反射 S V 波面および表面波が一組となって形成する縞模様の特徴が示された。この特徴を持つ縞模様は第 4 章で示す等色線縞模様写真にしばしば現われる。



本章は、まず動光弾性実験の原理を述べ、高速度撮影法に関して高速駒撮りカメラおよび光シャッターを用いる二種類の基本的な等色線縞模様の撮影法を紹介した。

本論文で採用した動光弾性実験はこれら二種類のそれぞれに属する実験法であり、高速系および繰り返し入力系としてそれぞれの特性を比較した。ただし、同一模型に対して同時に両撮影法を適用できなかつたため、それぞれの場合に対する地盤模型の基本となる基準模型に対する入射パルスを、ひずみゲージ測定および等色線縞模様写真によって比較し、光弾性縞模様の現れ方を示した。また、そこでは平面波パルスを発生させる方法と適用限界も示した。

これらの比較により本実験に関して、撮影法、入射パルス、等色線縞模様写真について以下のように考察される。

(1) ここで用いた繰り返し入力法は、動光弾性実験として再現性の確保が最も重要であり、それは主として銃弾衝撃による入力の再現性と、黄銅角棒と模型板の接着状態とに依存する。

(2) 両者の入射パルス形は立ち上がり時間約 $10\mu\text{sec}$ ，継続時間約 $50\mu\text{sec}$ ，SV波のパルス波長約 $5\text{cm}$ のほぼ三角形状である。

(3) 高速カメラ系は黄銅角棒断面と模型板厚の寸法の差が少なく、入射状態が自然でパルス形も滑らかである。

(4) 繰り返し入力系は黄銅角棒断面と模型板厚の寸法の差が高速カメラ系より大きく、また黄銅角棒から注目領域までの距離が短いため、パルス形に振動的な成分が含まれる。

(5) 入射パルスの主ひずみ差および縞次数ともに繰り返し入力系の方が小さく、ピーク値は高速カメラ系の約72%である。

(6) 等色線縞模様写真については、繰り返し入力系の方がレンズ系の能力と露出時間の短さにより分解能がよく、視野のあり方も便利な点が多い。ただし、駒数を増加させるときは繰り返し入力系の方が再現性の問題で信頼性が低下すると考えられる。

(7) 基準模型の波動応答について、入・反射P波およびSV波パルスの波面の幾何学的関係から、模型板の動的諸性質が求まり、SV波が垂直入射する場合と、臨界角をわずかに越えた入射角に対する自由境界を設定した。

(8) SV波が臨界角を越えて入射した場合の、自由境界付近の等色線縞模様の典型的な分布形が得られた。また、その場合の自由境界の応答比に従って縞次数が急増することも確かめられた。

(9) 高速カメラ系と繰り返し入力系との関係から、両者が併用できる場合には、注目領域の比較的長い時間にわたる応答の概略を高速カメラ系で推定し、局所的な応答の詳細を繰り返し入力系で確認する方法が妥当であると考えられる。

表-3.1.1 偏光系の配置

偏光の型	$P_1, P_2, Q_1, Q_2$ の配置	視 野	等傾線	単色光での等色線(黒縞) の示す縞次数
平 面	$P_1 \perp P_2$ $P_1 // P_2$	暗 明	暗 明	$n (n=0, 1, 2, \dots)$ $n + 1/2$
円	$P_1 \perp P_2, Q_1 \perp Q_2$ $P_1 \perp P_2, Q_1 // Q_2$ $P_1 // P_2, Q_1 // Q_2$ $P_1 // P_2, Q_1 \perp Q_2$	暗 明 暗 明	現れず " " "	$n$ $n + 1/2$ $n$ $n + 1/2$

ただし、P、Qの主軸は互いに $45^\circ$ をなすようにする。

表-3.1.2 光弾性材料の性質

光 弾 性 材 料	光弾性定数 $C$ (Brewster)	光弾性感度 $\alpha$ (mm/kg)	縦弾性係数 $E$ (kg/cm <sup>2</sup> )	ポアソン比 $\nu$
エポキシ樹脂	50~55	0.94	$3 \sim 3.2 \times 10^4$	0.37
ジアリルフタレート	38~42	0.7	$2.3 \sim 3.8 \times 10^4$	0.41
ポリカーボネイト	—	1.33	$2.6 \times 10^4$	—
プレキシガラス	4.9~10.9	0.2	$2 \sim 3.0 \times 10^4$	0.40
CR-39	—	0.71	$1.76 \times 10^4$	—
フェノライト	52	0.95	$4.1 \times 10^4$	0.33
ゼ ラ チ ン	16,000	300	$1 \times 10^{-3}$	0.5

Brewsterの単位は $10^{-3} \text{ cm}^2/\text{dyne}$ である。

表-3.2.1 MLD-1型超高速カメラの性能諸元

最高撮影速度	12万駒/秒以上
一駒の最少露出時間	0.5 $\mu$ sec
明るさ	最大 f: 9
画面寸法	25 $\times$ 5(mm)
撮影駒数	連続 200 駒
使用フィルム	35mm 標準フィルム
フィルム長さ	1,884 mm (有効長さ1,000mm)
解像力	40本/mm
撮影方式	群撮影方式
入 力	a.c.100V or a.c.200V, 1.4KVA
装置寸法	横 700 $\times$ 縦 807 $\times$ 高さ 865 (mm)
装置重量	約 100 kg

表-3.2.2 MLD-1型超高速カメラの光学諸元

レ ン ズ (L 1)	F:7.7 f= 525(mm)
レ ン ズ (L 2)	F:3.5 f= 78(mm)
集光レンズ (L 3)	F:4.8 f= 185(mm)
4 面体回転反射鏡(R.M.)	30 $\times$ 50 $\times$ 30(mm)
表面反射鏡 (M 0)	83 $\times$ 120 $\times$ 5(mm)
山型表面反射鏡(M 1)	42 $\times$ 72 $\times$ 3(mm)
表面反射鏡 (M 2)	36 $\times$ 60 $\times$ 3(mm)
表面反射鏡 (M 3)	22 $\times$ 38 $\times$ 1.5(mm)
表面反射鏡 (M 4)	22 $\times$ 32 $\times$ 1.5(mm)

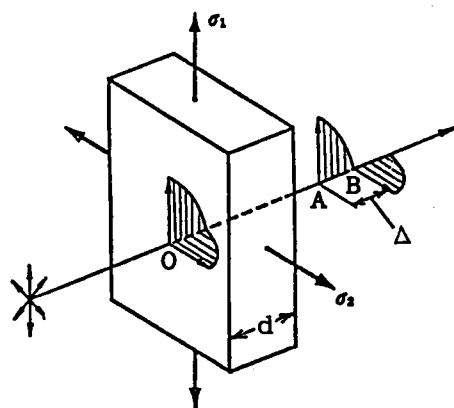


図-3.1.1 主応力方向と偏光

$P_1, P_2$ : 偏光子,  $T$ : 模型板

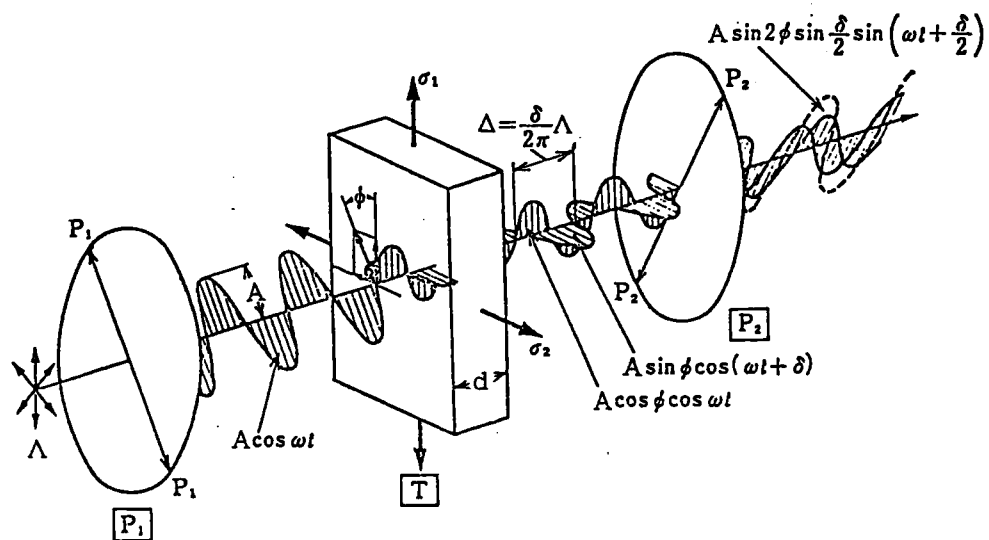


図-3.1.2 偏光子と平面偏光 ( $P_1 \perp P_2$ )

$P_1, P_2$  : 偏光子  
 $Q_1, Q_2$  :  $1/4$  波長板  
 $T$  : 模型板

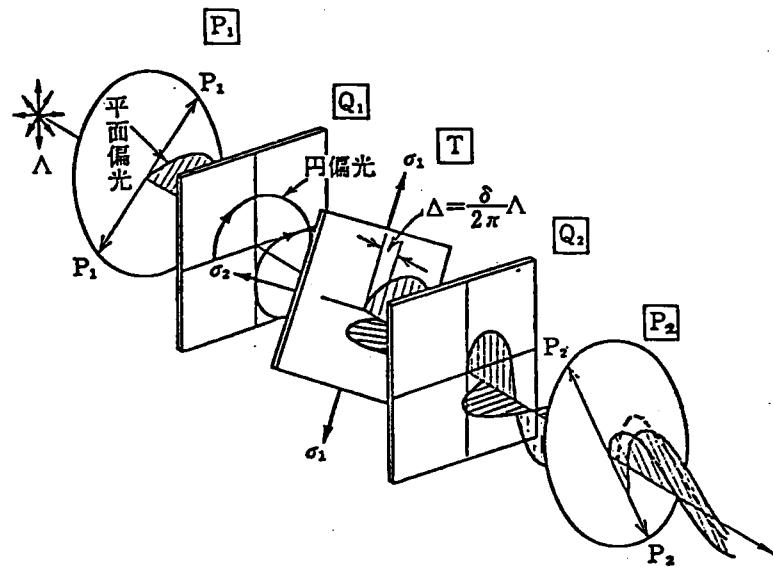


図-3.1.3 四分の一波長板と円偏光  
 ( $P_1 \perp P_2$ ,  $P_1$ と $Q_1$ ,  $Q_2$ は $45^\circ$ )

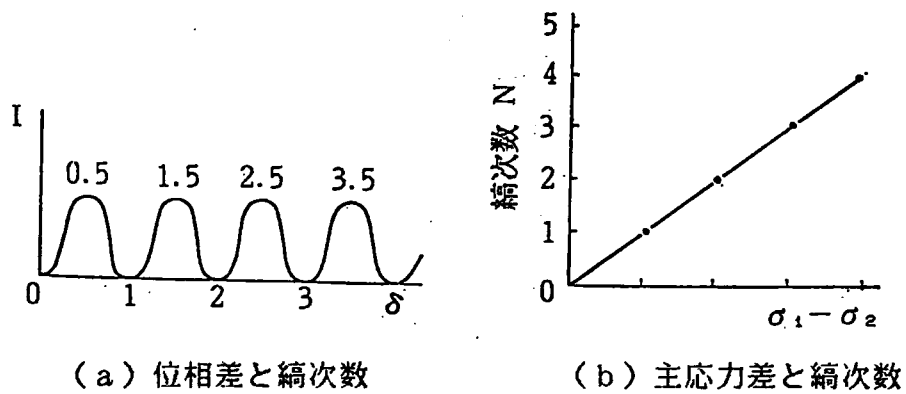
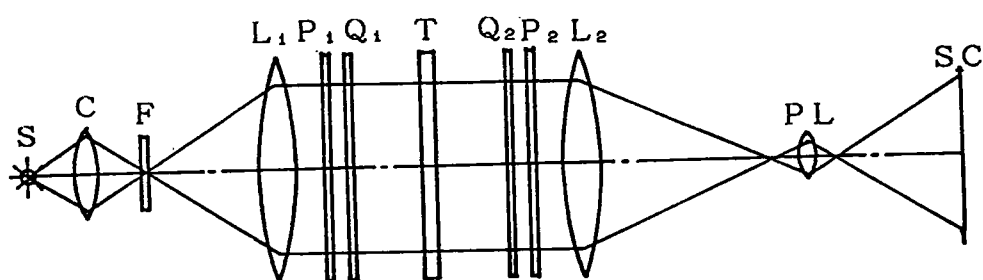


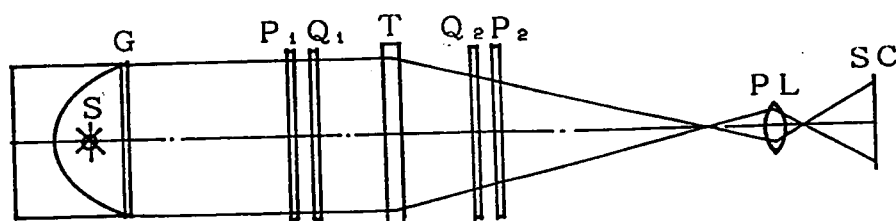
図-3.1.4 位相差と主応力差

S : 光源, C : 集光レンズ, F : フィルター,  $L_1, L_2$  : 視野レンズ,  
 $P_1, P_2$  : 偏光子,  $Q_1, Q_2$  :  $1/4$  波長板, T : 模型板,  
 PL : 写真レンズ, SC : スクリーン



(a) 標準的な光弾性光学系

G : すりガラス



(b) 本研究で用いた光弾性光学系

図-3.1.5 光弾性光学系

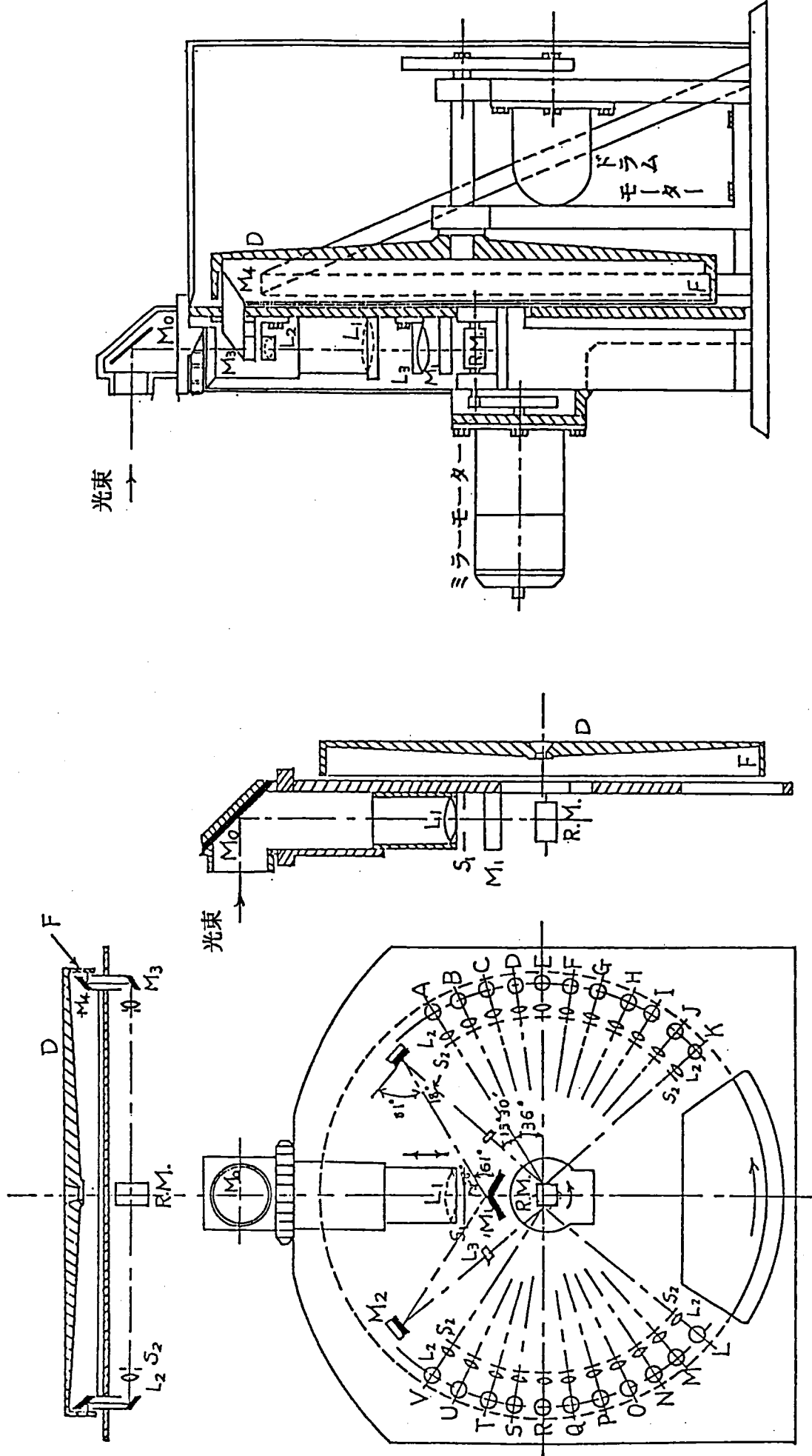
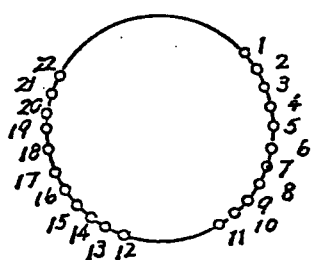


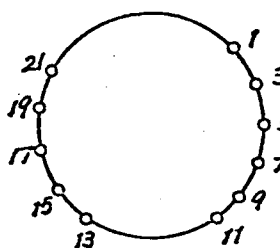
図-3.2.2 MLD-1型超高速カメラの機構図

図-3.2.1 MLD-1型超高速カメラの光学系構造図

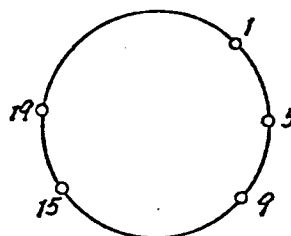
A:  $L_2$  レンズを全  
部使用した場合



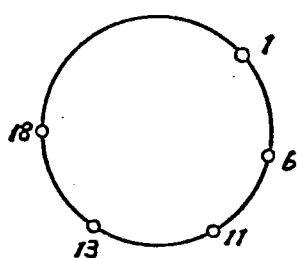
B:  $L_2$  レンズを1個  
おきに覆った場合



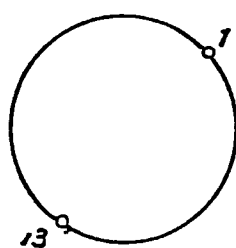
C:  $L_2$  レンズを3個  
おきに使用した場合



D:  $L_2$  レンズを4個  
だけ使用した場合



E:  $L_2$  レンズを2個  
だけ使用した場合



F:  $L_2$  レンズを1個  
だけ使用した場合

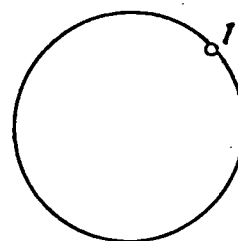


図-3.2.3 MLD-1型超高速カメラの $L_2$  レンズ系



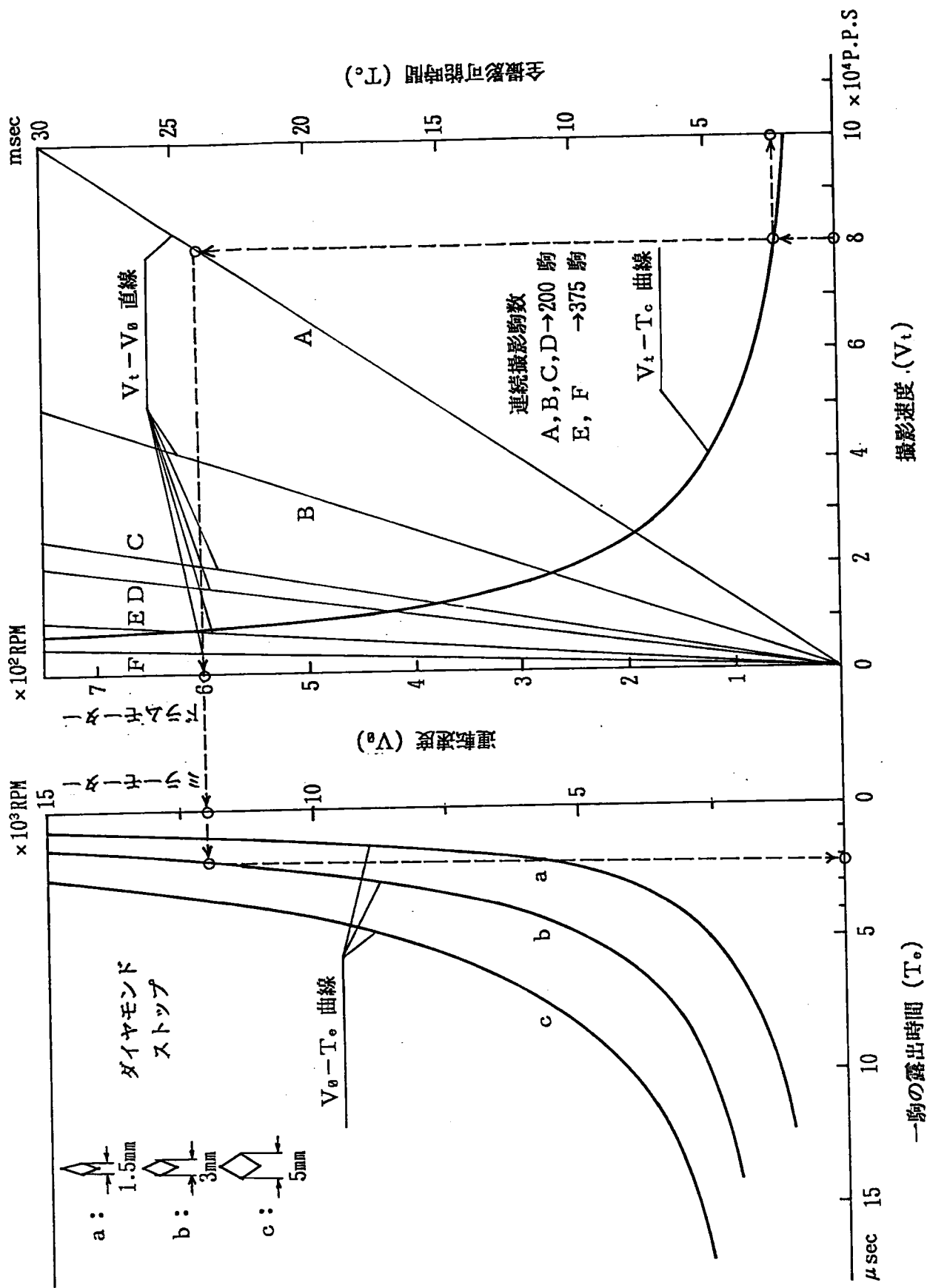
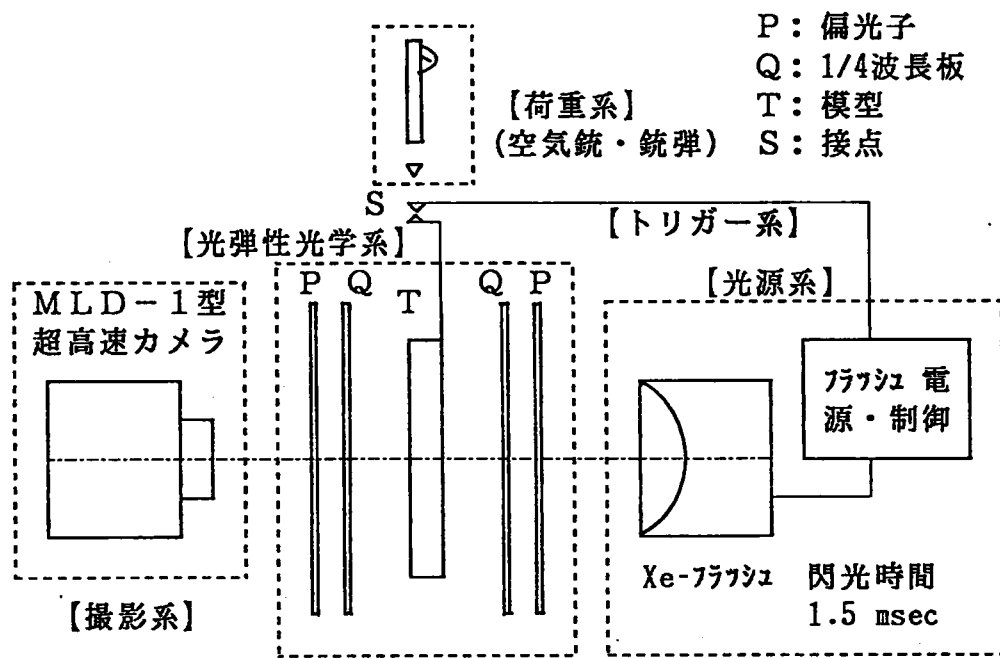
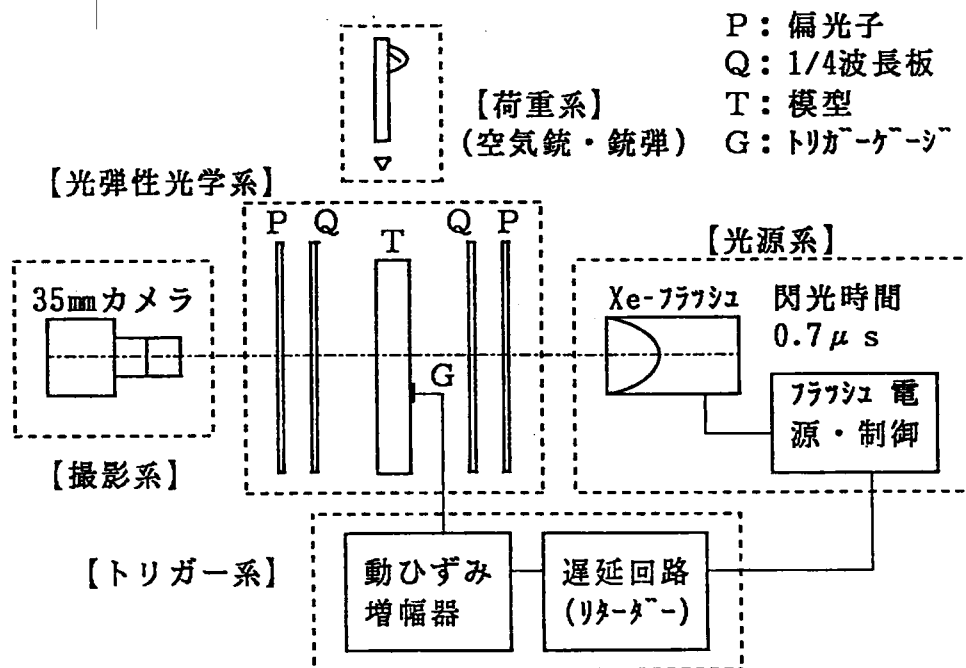


図-3.2.4 MLD-1 型超高速カメラの撮影特性曲線



a) MLD-1型超高速カメラの実験装置



b) 繰り返し入力法の実験装置

図-3.2.5 動光弾性実験装置のブロックダイアグラム

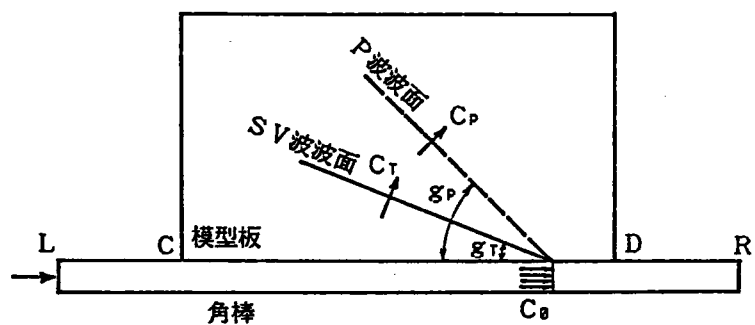
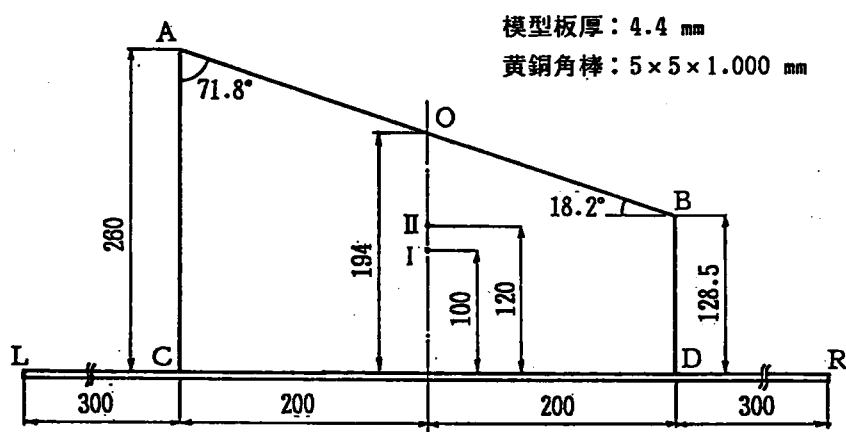
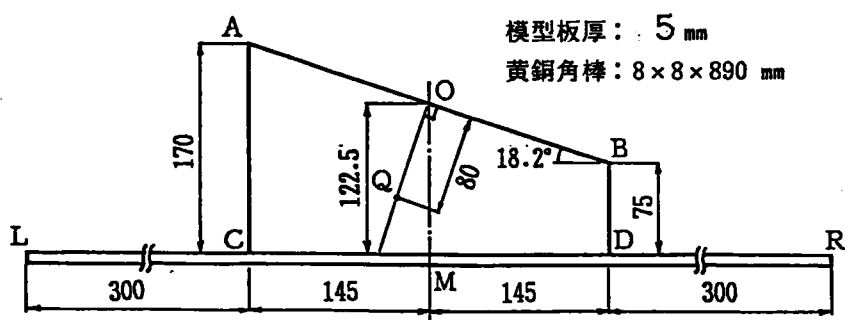


図-3.4.1 角棒からの Head wave による模型板への入射平面波



(a) 高速カメラ系の基準模型  $S_0^H$



(b) 繰り返し入力系の基準模型  $S_0^R$

図-3.4.2 基準模型  $S_0$  単位: mm

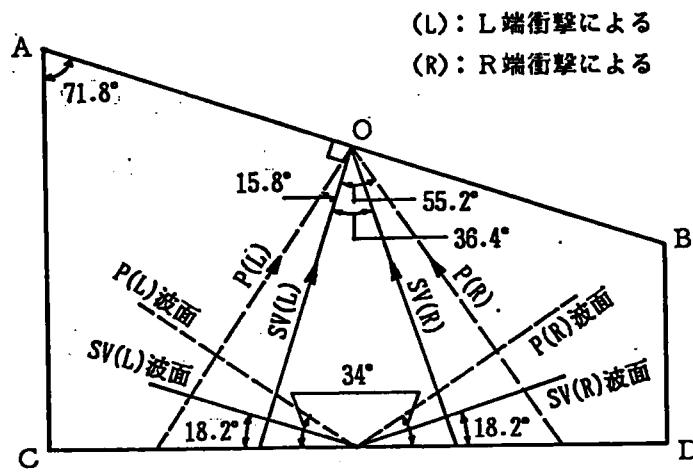
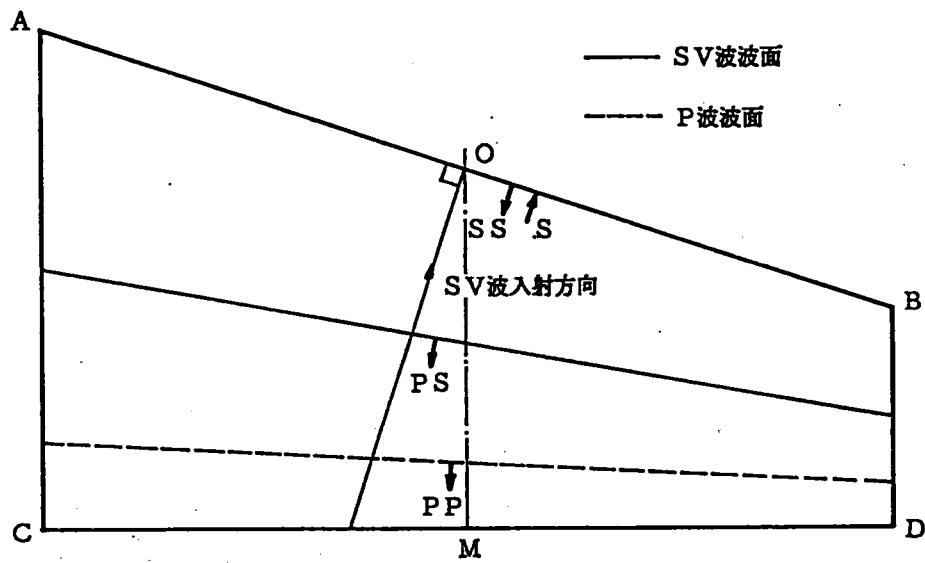
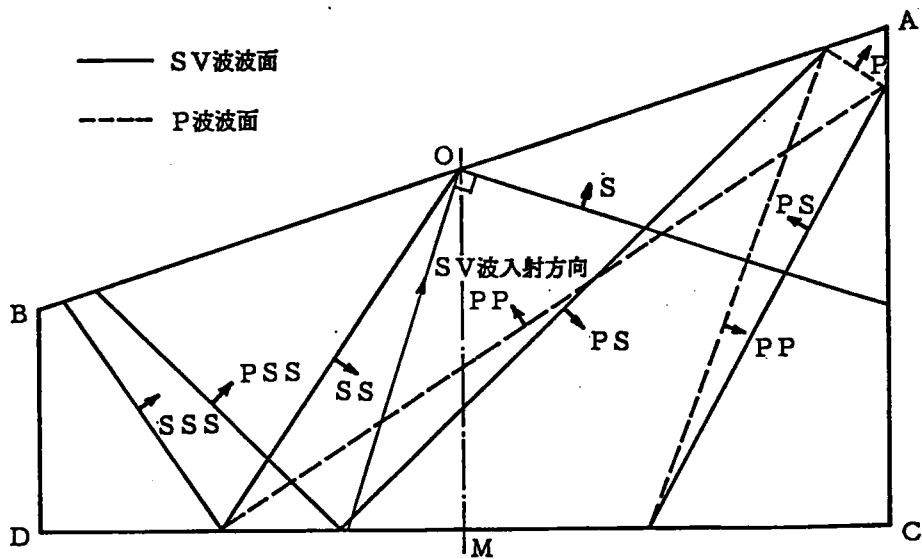


図-3.4.3 基準模型  $S_0^H$  に対する入射波面とO点への入射角



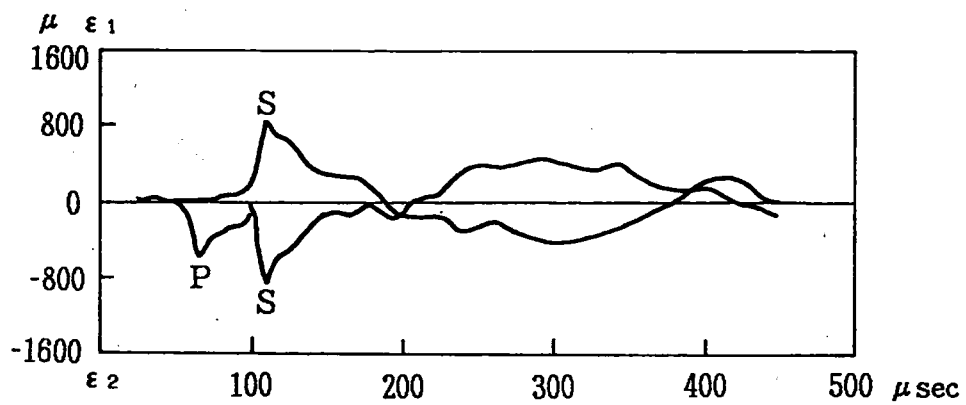
(a) L端衝撃による波面

(例) PSS : 入射P波による反射SV波がさらに反射SV波となる。

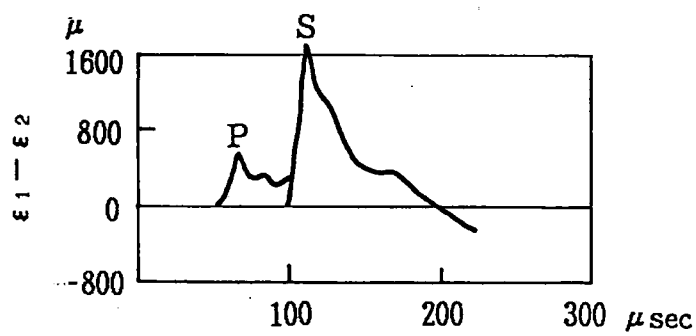


(b) R端衝撃による波面

図-3.4.4 基準模型  $S_0^R$  のO点へ入射SV波が達したときの反射波面

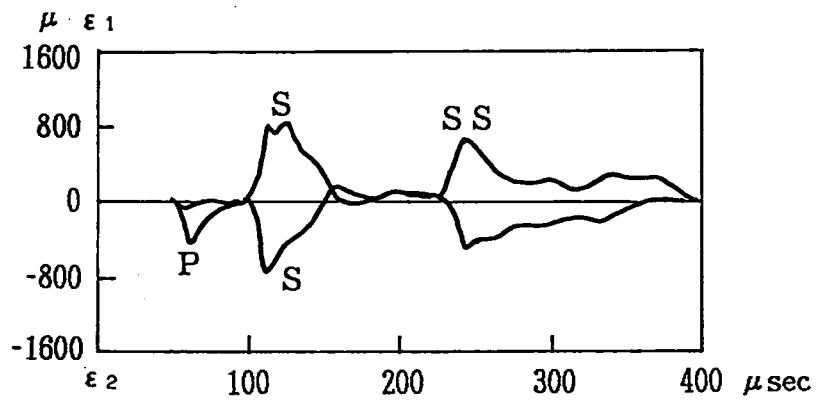


(a) 測点 I の主ひずみ波形

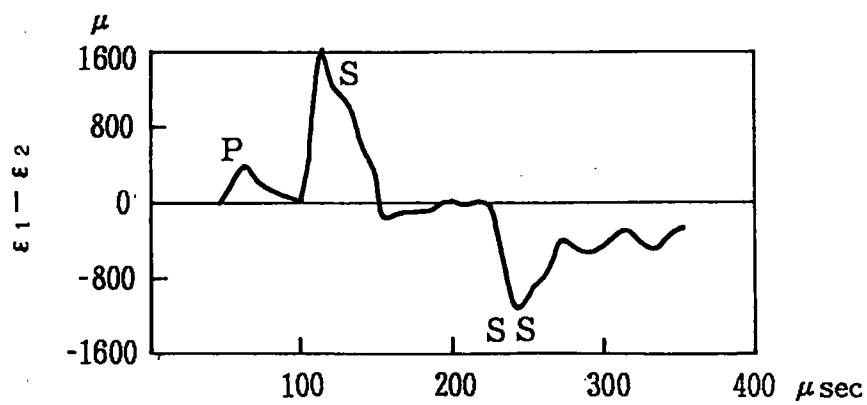


(b) 測点 I の主ひずみ差波形

図-3.4.5 基準模型  $S_0^H$  の R 端衝撃による測点 I のひずみ波形

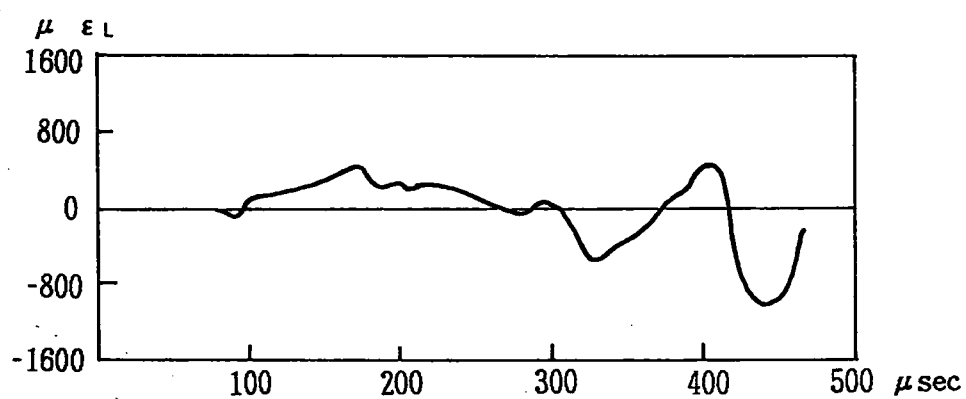


(a) 測点Ⅱの主ひずみ波形

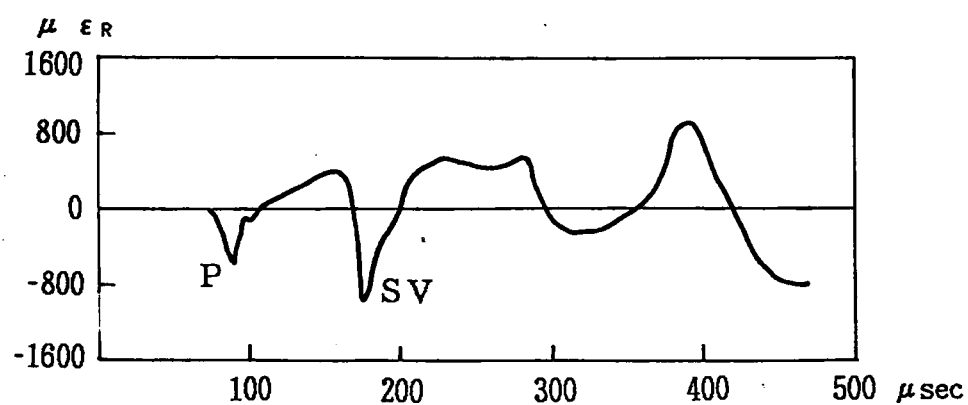


(b) 測点Ⅱの主ひずみ差波形

図-3.4.6 基準模型  $S_0^H$  のL端衝撃による測点Ⅱのひずみ波形



(a) 測点OのL端衝撃による直ひずみ  $\varepsilon_L$



(b) 測点OのR端衝撃による直ひずみ  $\varepsilon_R$

図-3.4.7 基準模型  $S_0^H$  のL端衝撃およびR端衝撃による  
測点Oの直ひずみ

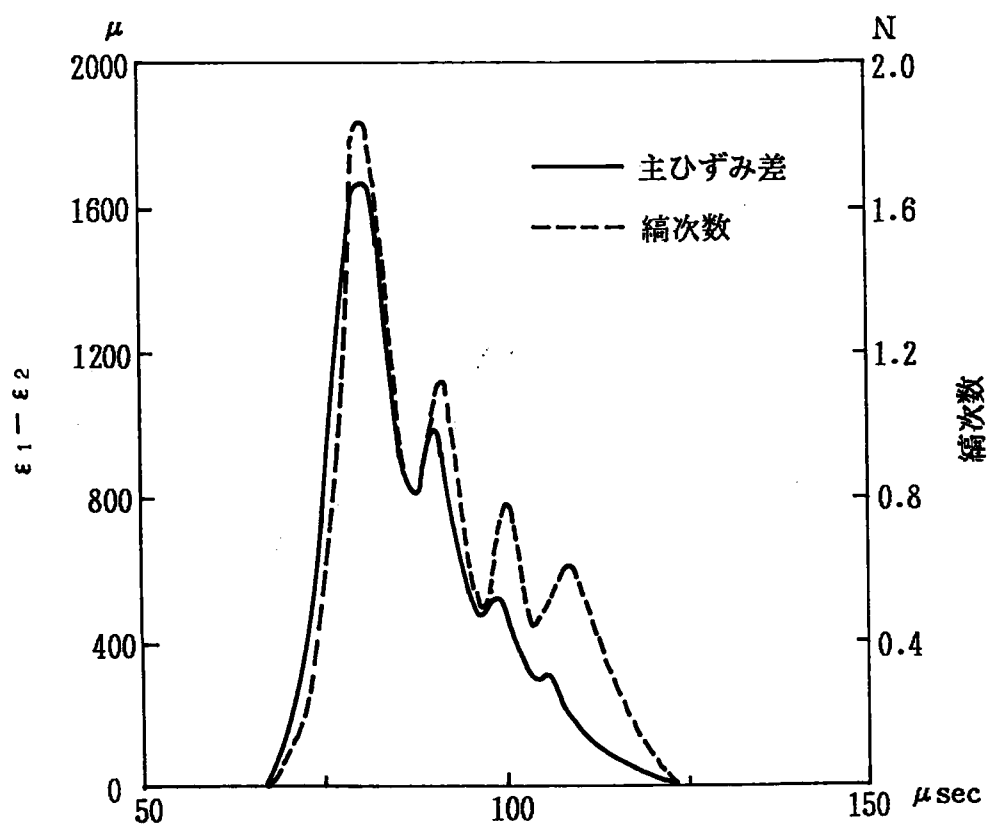
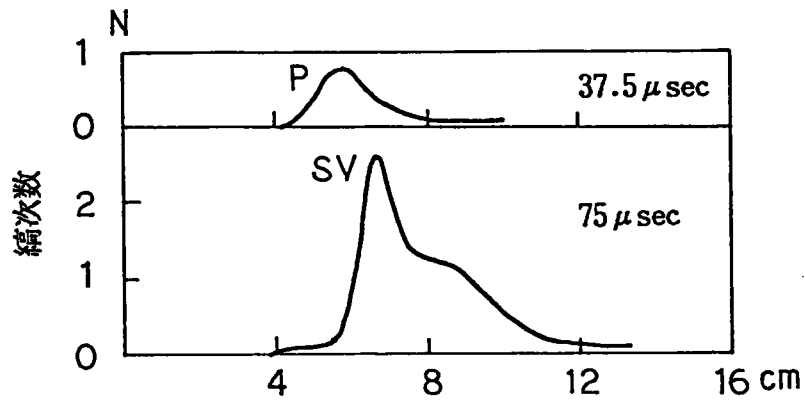
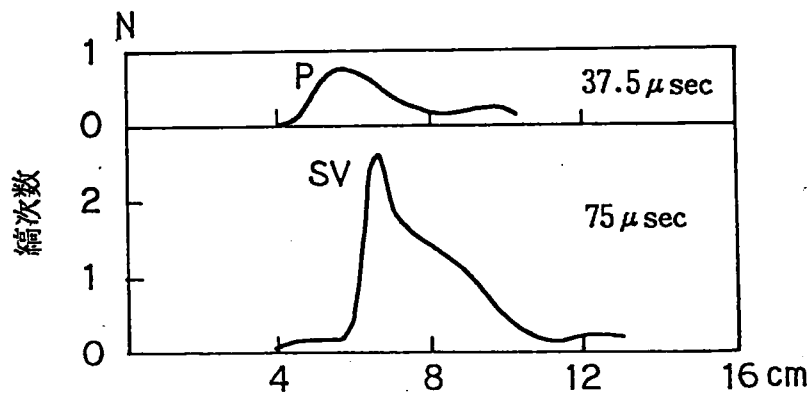


図-3.4.8 基準模型  $S_0^R$  のL端衝撃による測点Qの主ひずみ差と繰りかえし数の入射パルス形





(a) L端衝撃による波次数分布



(b) R端衝撃による波次数分布

図-3.4.9 基準模型  $S_0^H$  の測点 I 付近の入射 SV 波の伝播方向に沿う方向の波次数分布

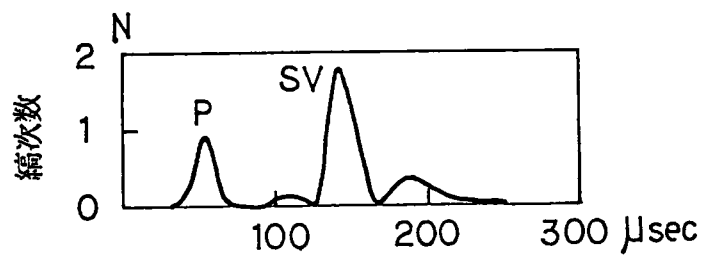


図-3.4.10 R端衝撃によるO点の波次数変化

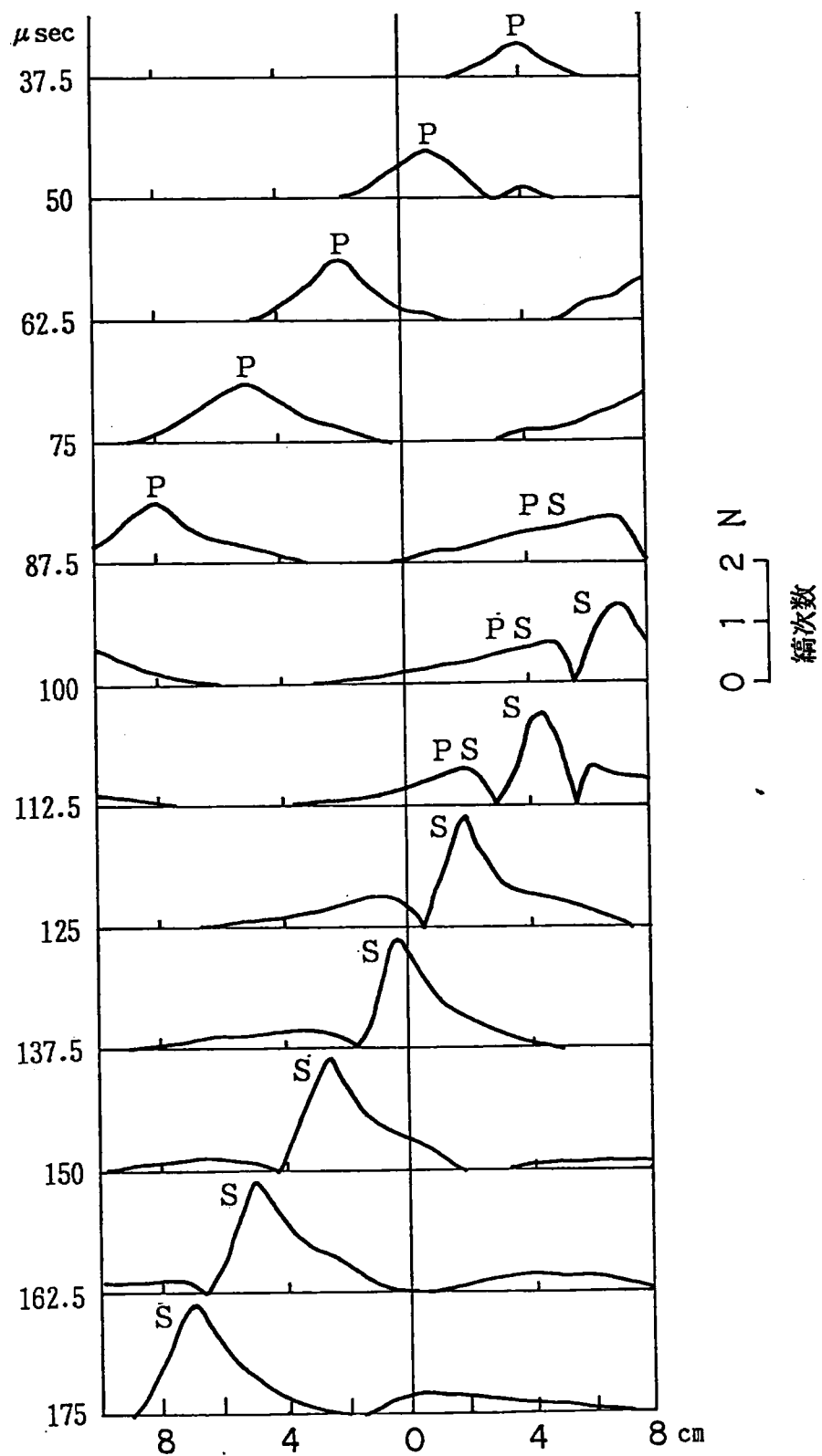


図-3.4.11 R端衝撃による0点付近の自由境界に沿う  
 高次数分布の変化

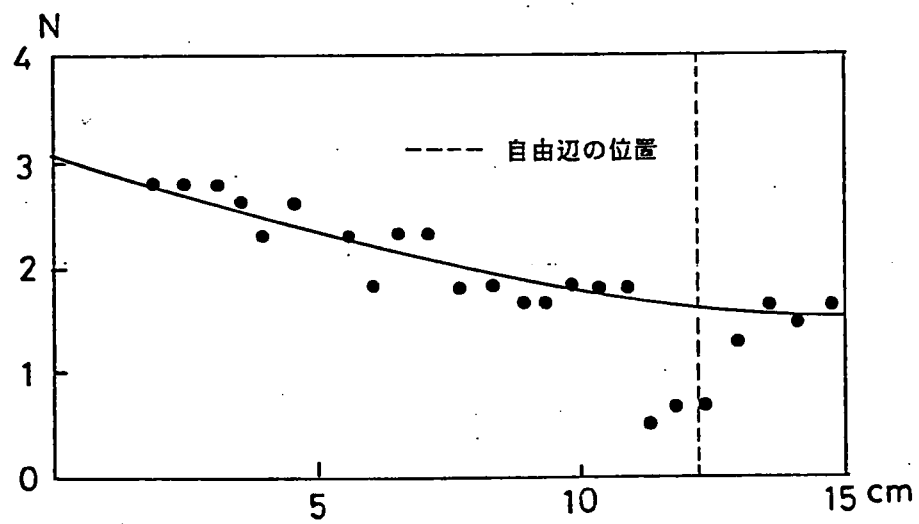


図-3.4.12 基準模型  $S_0^R$  を L 端衝撃した場合の  
入射 S V 波のピーク縞次数の距離変化

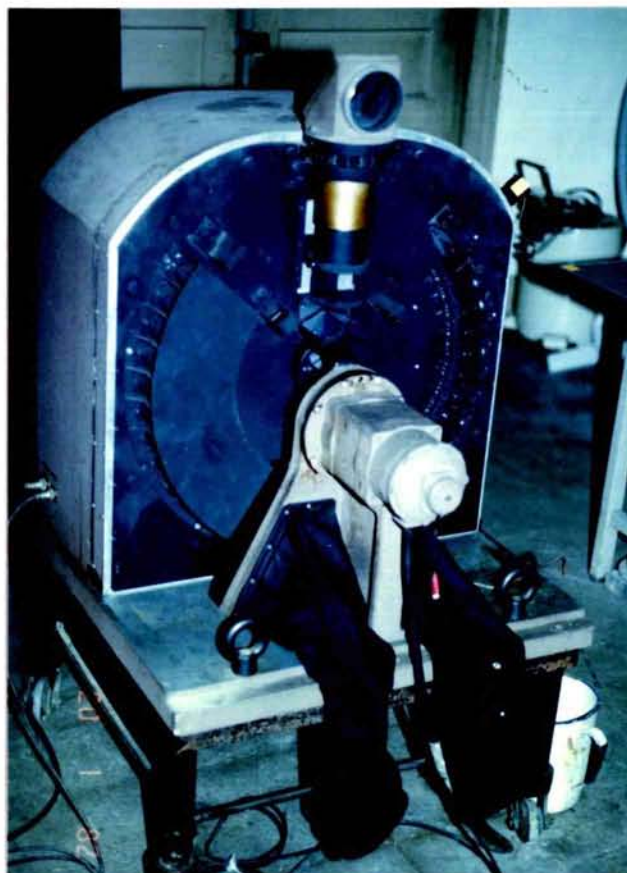


写真-3.2.1 (a) MLD-1型超高速カメラの内部



写真-3.2.1 (b) MLD-1型超高速カメラ



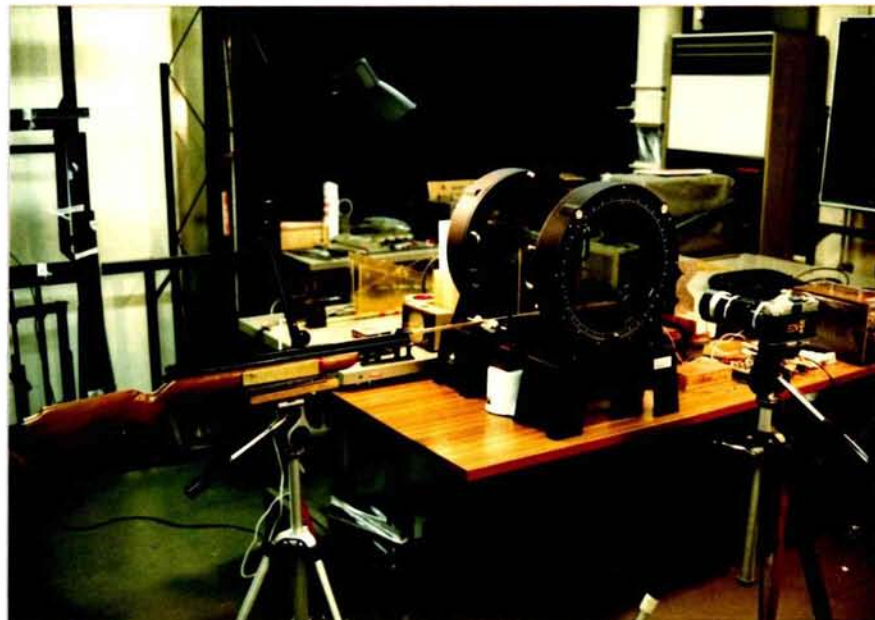
写真-3.2.2 MLD-1型超高速カメラの  
第2レンズ系で撮影された像(M1008)



写真-3.2.3 高速カメラ系の光源系と光弾性光学系



(a) カメラ側からみた装置全体



(b) 空気銃側からみた装置全体

写真-3.2.4 繰り返し入力系の実験装置



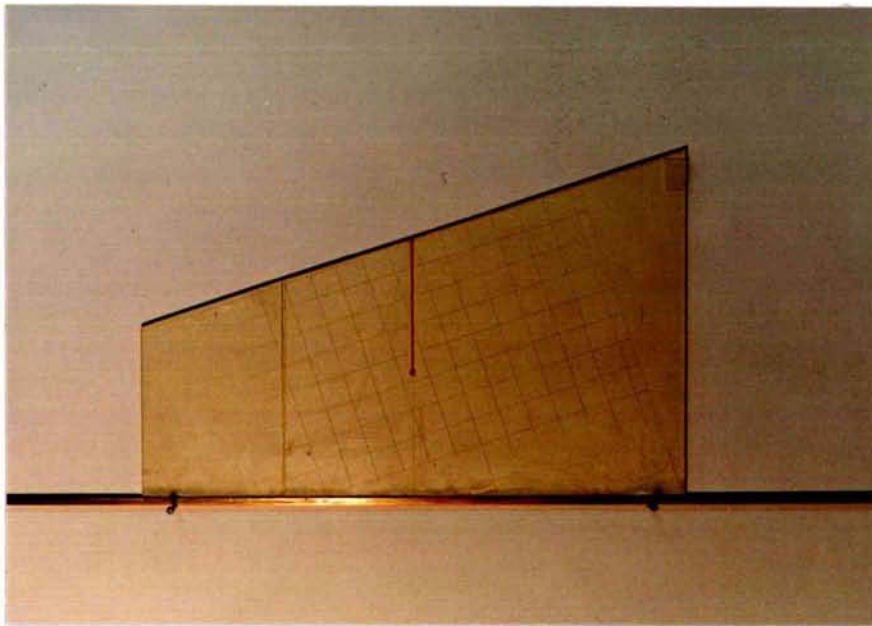


写真-3.4.1 (a) 高速カメラ系の模型例(H1303)

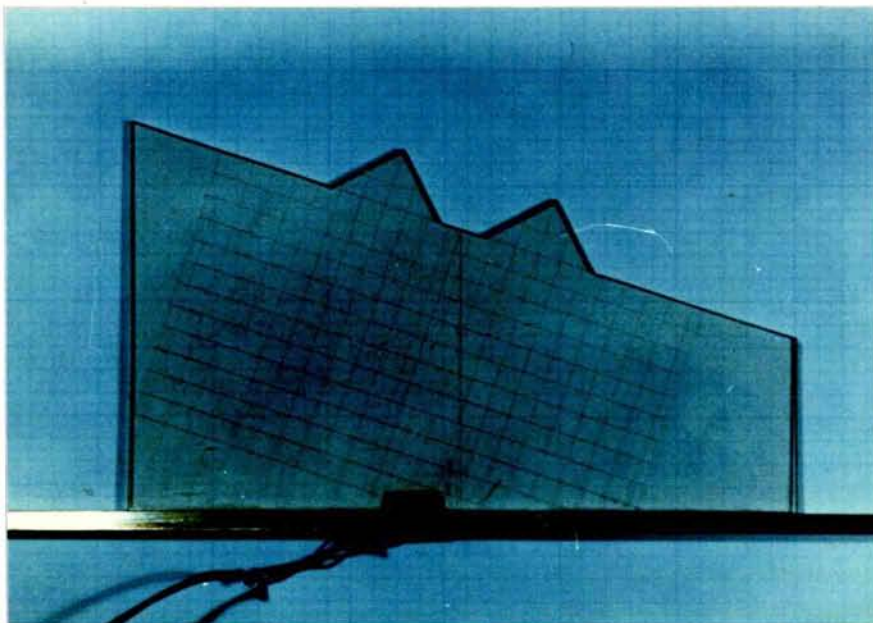


写真-3.4.1 (b) 繰り返し入力系の模型例(R1006)

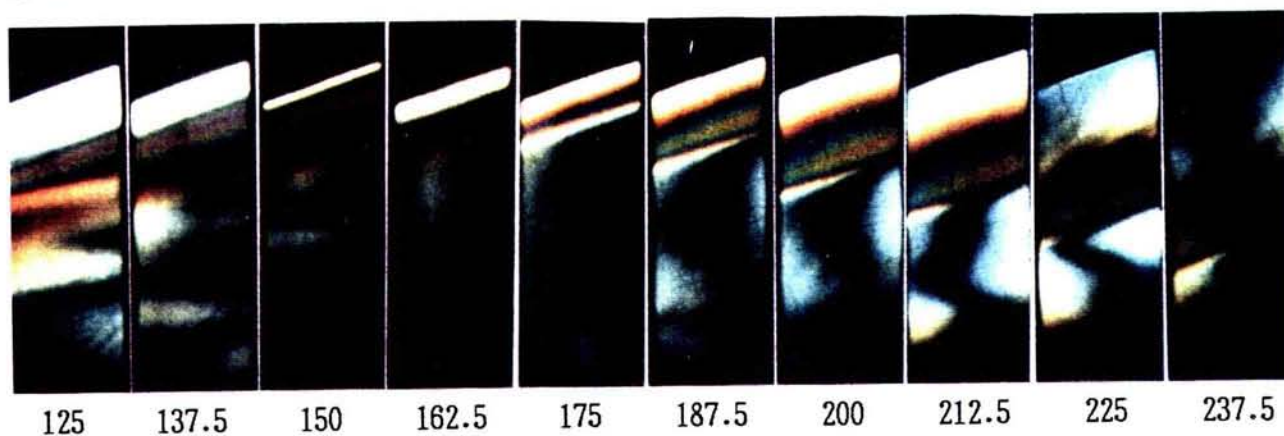
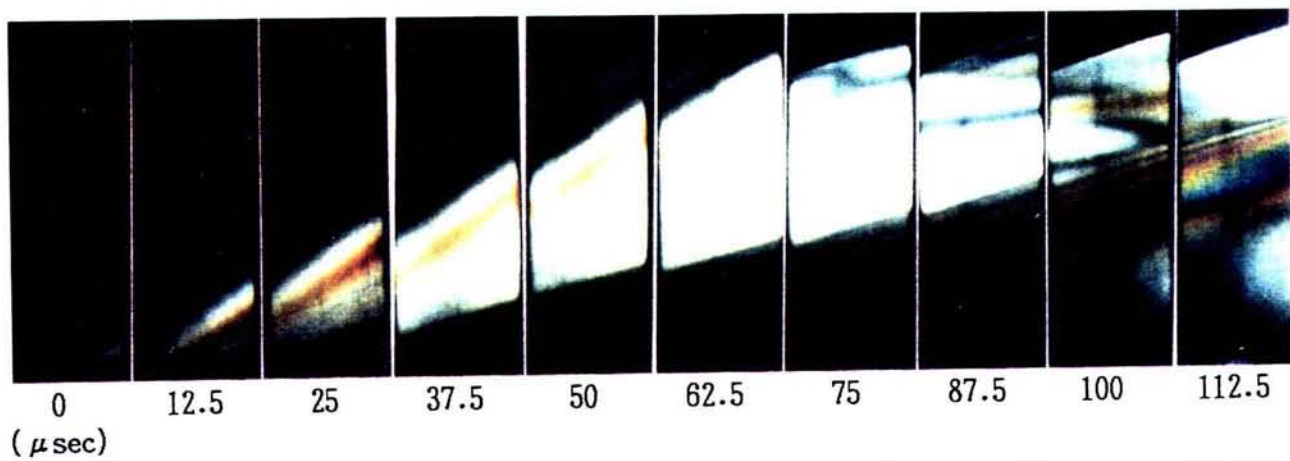


写真-3.4.2 基準模型  $S_0^H$  の L 端衝撃による等色線縞模様写真<sup>H</sup>

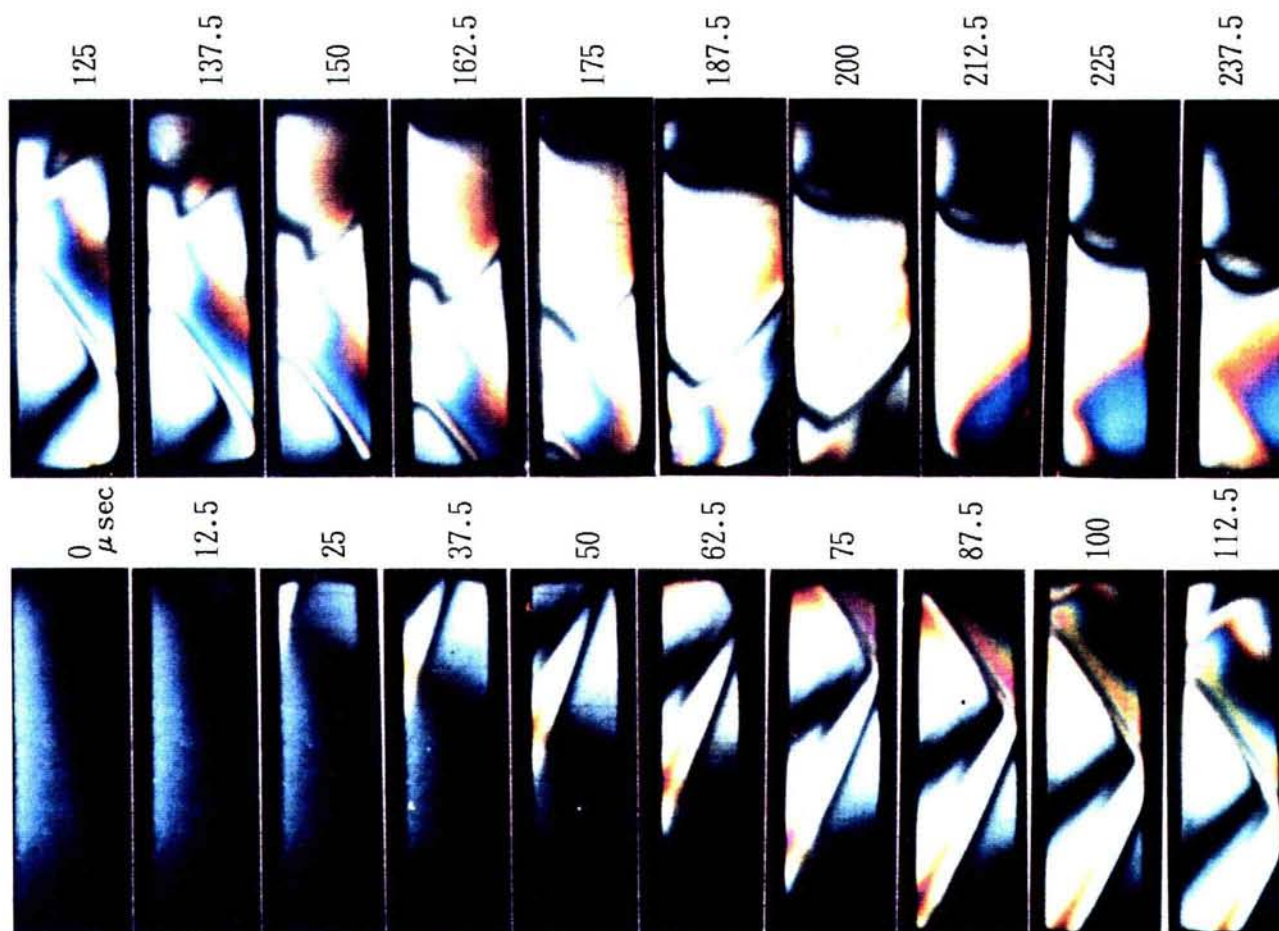


写真-3.4.3 基準模型  $S_0^H$  の R 端衝撃による等色線縞模様写真<sup>H</sup>



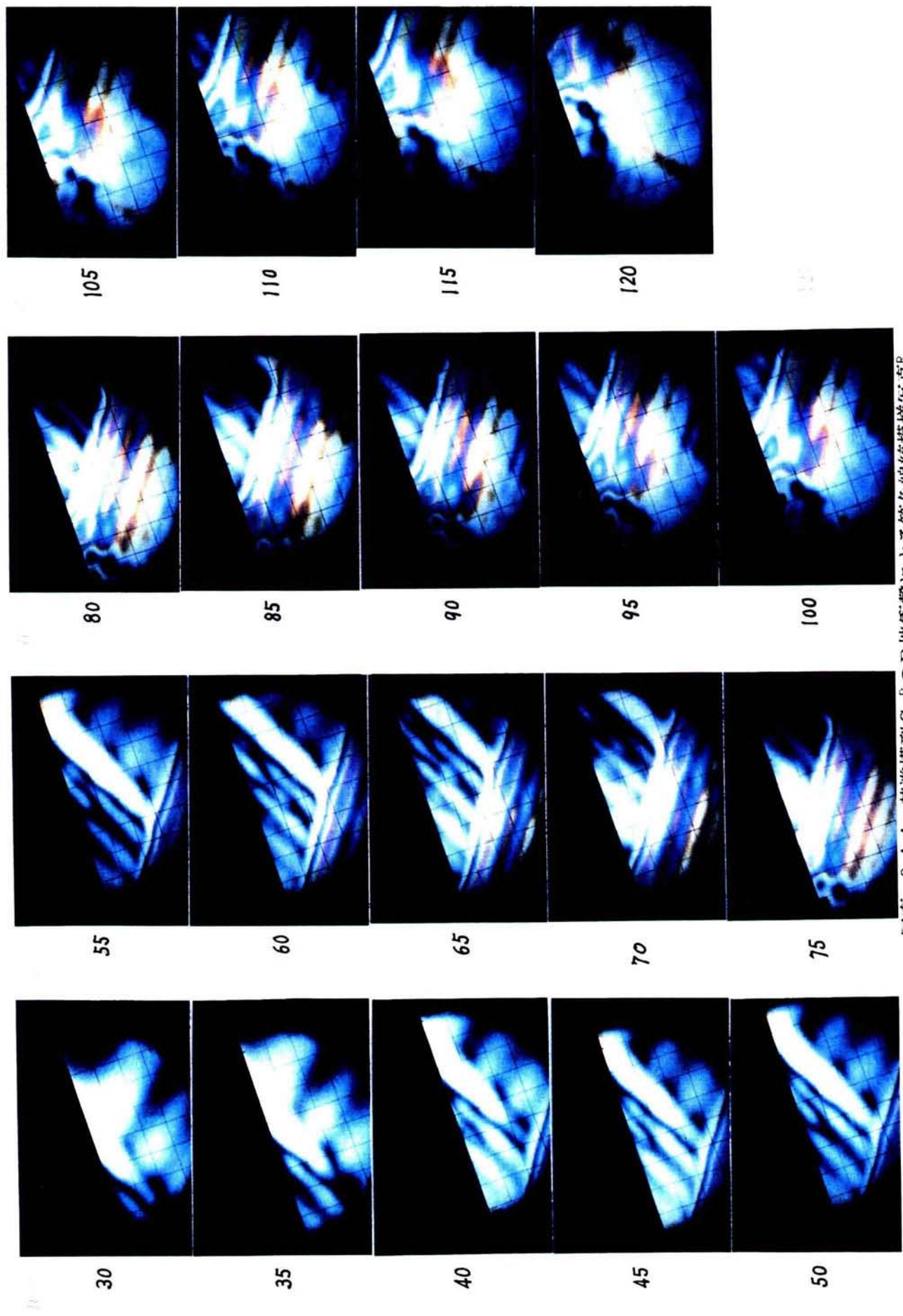


写真-3.4.4 基準模型  $S_0^R$  の R 端衝撃による等色線縞模様写真<sup>R</sup>

## 第4章 地盤模型に対する動光弾性実験

### 第0節 緒 言

第3章において、動光弾性実験による等色線縞模様写真の例を示し、基準模型に対する自由境界付近の応答に対応する縞模様について解説した。

本章では、実地盤の波動伝播挙動に適用できるような地盤模型に対して動光弾性実験を行ない、等色線縞模様の挙動から波動応答を検討する。しかし、前章で示したように実験で得られる入射パルスの形が、たとえば地震波形と根本的に異なっており、また、地盤模型に設定できる各種の地盤構造の寸法も、パルス長とほぼ同じオーダーに限られる点で、得られた結果は当然地震を対象にした応答としてそのまま適用できるわけではない。

ここで注目する波動挙動は、地盤構造の一部またはマクロにみた場合に地盤に存在する形状を代表するような地盤模型について、明確にまた特徴的に現われる応答に限る。しかし、第5章の数値シミュレーション結果から明らかにされるように、発生する縞次数の関係で縞模様として判別できない応答も多く、多数の実験結果から類推して挙動を推定する必要が生ずる。

地盤模型への入射波として主にS V波を対象にするが、すでに述べたように、入力方法の特性から必然的にP波入射も伴っており、応答の特徴が著しい場合にはP波入射についても考察の対象にする。単純化の観点からは入射P波が存在することは障害となることも多いが、P波およびS V波入射に対する実験が同時に行えるという観点からは便利な要素もある。

本章の目的は、上記のように与えられた形状の地盤模型に対する波動応答を、等色線縞模様の形および縞次数の状態から解明することである。しかし、地盤模型の自由境界の形状が部分的に第2章で問題にした自由境界への入射角が変化する場合を含むものが多く、その意味で様々な形状の自由境界についての表面波の挙動を検討することができ、結果的に平面波入射に対するこれらの自由境界の波動挙動を、動光弾性実験によって解明することも同時に主要な目的となる。

以下の各節では応答の大きさを評価するために、応答縞次数の値をそのまま用いる場合と、入射パルス（P波またはS V波）の最大縞次数（ $N_0$ ）に対する応答縞次数（ $N$ ）の比を、応答比（ $N/N_0 = \tau_{max}/\tau_0$ ）または縞次数比と呼んで用いる場合がある。

なお、本章で対象にする地盤模型には、注目領域の挙動を比較的長時間にわたって観察する必要があるものもあり、基準模型 $S_0^R$ の大きさでは不足する場合がある。その場合にはやむを得ず全体の寸法を大きくしたため、黄銅角棒から基準点（O点）までの垂直距離が増加している地盤模型もある。したがって、模型によっては繰り返し入力系であっても、O点へS V波が入射する時間および入射時のピーク縞次数に差がある場合もある。

## 第1章 第1節 地盤模型

### 4. 1. 1. 均質地盤模型

第3章第3節で、動光弾性実験に用いる三種類の光弾性模型材料E p - I, E p - II, E p - IIIを示した。ここでは、E p - Iだけで構成された地表の形が不整形な場合を表現する地盤模型を均質地盤模型として示す。各模型は基準模型のO点付近を中心として所定の形状を持つように成形した。

図-4.1.1 に、18種類の均質地盤模型を基準模型のO点付近における形状で示した。この図における模型番号において、最初の英字は動光弾性実験が

M: 高速カメラ系および繰り返し入力系の両系で（同時にではない）

H: 高速カメラ系のみで、

R: 繰り返し入力系のみで

行なわれたことを示す。また、最初と第二の数字10は模型材料がE P - Iのみで構成されていることを示す。

図中のA, Bは基準模型の辺ABに対応し、すべてAあるいは紙面に向かって左がL端側である。

以下に各模型の特徴を概説する。

M1000; 基準模型S<sub>0</sub>と同じ模型であるが、模型番号を統一するために掲げた。

M1001; 自由境界AB辺を黄銅角棒と平行にした場合で、自由境界ABへのSV波の入射角が臨界角を越えない $\gamma=18.2^\circ$ の場合となり、垂直入射と臨界角を越えた入射角の中間の場合の応答が得られる。

M1002~M1003; スリットを有する模型で、幅1.5mm、長さ100mmのスリットを設け、スリット側面に対して平行( $\gamma=90^\circ$ )、 $71.8^\circ$ 、 $53.6^\circ$ の3種類のSV波の入射角が得られる。スリット底および入射側と非入射側のスリット側面の波動応答、およびスリットによって入射波面が遮られる領域の応答に注目する。この模型は亀裂に平面波が入射する場合の応答にも対応している。

R1004; 上記のスリット底は、二つの近接して向かい合った隅角で形成されていると見なせるが、スリット底の幅またはスリット底の形状による応答の違いを検討する目的で、上記のスリットと長さは同じで、スリット底を半径5mmの半円にした。

R1005, R1006; 頂点が直角である直角二等辺三角形の山型部分を持つ模型である。高さが5cmで入射SV波のほぼ一パルス長の単独のもの(R1005)については、SV波が底辺に対して垂直と $36.4^\circ$  ( $>\gamma$ 。)で入射する場合が得られる。また、垂直入射のとき三角形部分の斜辺に対して入射角が $45^\circ$ となり、この自由境界に対して特別な応答が得られる。三角形の高さが2.5cmの模型(R1006)は三角形を2個を並べて設置し、底辺に対して $36.4^\circ$ の入射角で入射を行ない、三角形が連続した状態に対す

る応答を得る。

M1007～R1015；段差および斜面を有する模型。段差を形成する斜面の角度を変化させた場合、および立ち上がり部の状態を直角隅角または鈍角隅角とした場合、隅角の代わりに半径40mmの円弧とした場合などを設定した。これらの模型をLおよびR端衝撃すると、段差部分に対する様々な角度の入射状態が得られる。特に、入射波の伝播に伴って入射角がいろいろな角度の範囲で、急変または漸変する場合の自由境界部分の応答が詳細に得られる。

R1016, H1016, R1017；曲線的な凹面を持つ模型。部分的には段差を持つ模型と同じ状態もあるが、LおよびR端衝撃に対して必ず垂直入射する接面が存在するところが異なる。次項の非均質地盤模型を作成する前段階としての状態でもある。

#### 4. 1. 2. 非均質地盤模型

ここでは、模型材料E<sub>p-I</sub>で作られた均質地盤模型に、模型材料E<sub>p-II</sub>またはE<sub>p-III</sub>を辺ABに平行に継ぎ足すか、または空隙に充填した模型を非均質地盤模型として示す。

図-4.1.2 に、9種類の非均質地盤模型を示す。この図における模型番号において、最初の英字の意味は均質地盤模型と同じであり、H2001とH1230以外は、第2番目の数字は、2；E<sub>p-II</sub>，3；E<sub>p-III</sub>を用いたことを示す。また、数字の最後の2桁は対応する数字の均質地盤模型の形状を示す。対応する均質地盤模型にE<sub>p-II</sub>またはE<sub>p-III</sub>を継ぎ足すか充填して非均質地盤模型とした。図中のA，Bの意味と左右の方向も均質地盤模型の場合と同じである。

以下に各模型の特徴を概説する。

H2001；M1001と同じ型の均質地盤模型であるが、模型材料E<sub>p-II</sub>で構成されていることでここに分類した。次節で述べるように、模型材料の性質を検定するために用いられた模型である。

H1200，R1200；表層がE<sub>p-II</sub>，下層がE<sub>p-I</sub>で構成された平行二層地盤模型である。H1200は表層厚が40mmで高速カメラ系で使用された。R1200は表層厚が25mmで繰り返し入力系で使用された。

H1230；H1200の上にさらに層厚20mmのE<sub>p-III</sub>による表層を継ぎ足したもので、平行三層地盤模型である。

R1302～H1303；スリットを有する均質地盤模型M1002，M1003のスリットに、E<sub>p-III</sub>を充填した地盤模型である。この模型は、もしスリット底による波動挙動の効果を無視できる場合には、薄い低弾性係数層を挟む三層問題または断層模型の一つと考えることができよう。

R1215～R1216；曲線的な凹面の均質地盤模型にE<sub>p-II</sub>を充填した地盤模型で

ある。

なお、上記の地盤模型はほとんどの場合、L端衝撃およびR端衝撃の両衝撃に対して動光弾性実験を行なったが、次節で示す等色線縞模様写真には一方の衝撃のみの場合を示しているものもある。

## 第4章 第2節 等色線縞模様写真による波動挙動解析

ここでは、合計26種類の均質および非均質地盤模型を対象に行なった動光弾性実験の結果を、写真4.2.1～4.2.38までの38枚の等色線縞模様写真に示し、これをもとに波動挙動を検討する。ただし、このうち一部は第3節で考察する。

以下に示す等色線縞模様写真において、一枚の写真に細長い視野の20駒を $12.5\mu\text{sec}$ 毎に $0\sim 237.5\mu\text{sec}$ まで並べて編集した写真は高速カメラ系によるもので、一枚の写真に正方形に近い視野の8ないし12駒を5または $10\mu\text{sec}$ 毎に並べて編集した写真は繰り返し入力系によるものである。高速カメラ系と繰り返し入力系を区別するために、写真の表題の最後にそれぞれ添え字HまたはRを付けた。

### 4. 2. 1. 入射SV波が臨界角を越えない直線自由境界模型の場合

地盤模型M1001およびH2001の場合は、入射SV波の自由境界への入射角が臨界角を越えない。

写真-4.2.1 および写真-4.2.2 にそれぞれの場合の等色線縞模様写真を示す。

写真-4.2.1 は、基準模型 $S_0^H$ をR端衝撃した場合の自由境界付近の等色線縞模様（写真-3.4.2, 3.4.3）と比較する目的で示した。

図-4.2.1 (a), (b)に、 $E_p-I$ の模型板の自由境界へP波およびSV波が入射する場合の $\tau_{\max}$ の反射係数を、それぞれの入射波と入射角に対して示す。

入射P波の辺ABへの入射角 $\theta$ は、写真-3.4.2, 4.2.1, 3.4.3の順に、それぞれ $15.8^\circ$ ,  $34^\circ$ ,  $52.2^\circ$ になる。図-4.2.1 (a)によると、この順に反射P波（PP）の縞次数比は減少し、反射SV波（PS）の縞次数比は増加するが、等色線縞模様写真にもそのままの傾向が現われている。入射SV波（ $\gamma=18.2^\circ$ ）に対する応答は基準模型のR端衝撃の場合（ $\gamma=36.4^\circ$ ）とかなり異なる。この場合には、入射角が臨界角を僅かに越えた場合に現われる典型的な縞模様はなく、図-4.2.1 (b)に示されたように、入射SV波が自由境界で低い縞次数の反射SV波となる状態が示されている。また、反射P波（SP）もさらに低い縞次数で反射SV波の前方に判読できる。

写真-4.2.2 は、模型材料 $E_p-II$ の材料性質を求めるために行なわれた実験結果で、黄銅角棒内の伝播速度 $C_0$ は既知（ $3,600\text{m/sec}$ ）であるから、入射P波および入射SV波の波面の角度を測定すれば、式(3.4.1)からそれぞれの伝播速度 $C_p$ と $C_r$ が求まる。また、密度が分かればポアソン比および弾性係数が求められる。実際、表-3.3.2に示した値はこのようにして求められたものである。ここには示さなかったが $E_p-III$ の場合も同様にして求めた。

弾性係数が低い場合に、たとえばひずみゲージを用いる際はゲージのベース材料および接着剤の障害により、ひずみを正確に測定することはできないから、ここで行なった方法

は動的材料性質を検査する有力な方法であろう。

なお、写真-4.2.2 において、入射P波に対する自由境界からの反射SV波の角度を測定しても上記の伝播速度を確認することができる。ただし、この写真において、入射SV波が伝播するにつれて縞模様の変化する様子、および波面の鮮明度が変わることから、E p - II では粘性減衰の効果がかなり存在すると推定される。

#### 4. 2. 2. 平行非均質層模型の場合

地盤模型H1200, R1200, H1230に対する動光弾性実験結果は、平行非均質層模型の応答を示す。

写真-4.2.3, 4.2.4 に、H1200をそれぞれL端衝撃およびR端衝撃した場合の、写真-4.2.5 にR1200をR端衝撃した場合の等色線縞模様写真を示す。これらはE p - II 層の厚さが異なるだけで応答特性は同じである。

いま、自由境界からの反射波を考えないとすると、これらの場合に相当する二層問題の応答特性は、表-3.3.2 を参照すると図-2.2.2 および図-2.2.3 に示されている。いまの場合、E p - I とE p - II のポアソン比をそれぞれ $\nu_1$ ,  $\nu_2$ とすると、 $\nu_1 \neq \nu_2$ であるが、ポアソン比を平面応力場の値 ( $\nu^*$ )に変換すると、それぞれ $\nu_1^* = 0.28$ ,  $\nu_2^* = 0.31$ となるから、 $\nu_1^* \doteq \nu_2^* \doteq 0.3$  と考える。

入射SV波が層境界へ垂直入射する写真-4.2.3 の場合、基準模型についての対応する写真-3.4.2 と比較して、層境界で透過と反射が行なわれるため、E p - I 層内で入射波と反射波が重ね合わされても縞模様が消えることはない。

写真-4.2.3 では透過層のE p - II 内の縞次数は色として読みとり難い。ここに示していないが繰り返し入力系で得られた写真からは、透過波の最大縞次数は入射直後の層境界付近でほぼ 1.5次、そこから 1.5cm伝播した位置では約 1.0次を示している。

特性インピーダンス比が 0.5の場合、図-2.2.3 (a)から、透過SV波の $\tau_{\max}$ の透過係数は入射波の0.67倍である。3. 4. 2. 4) で述べたように $N_0^R = 1.83$ と考えているから、 $0.67N_0^R \doteq 1.2$ となる。このことから、E p - II の光弾性感度は見かけ上E p - I のそれにほぼ等しいと考えることができる。

層境界への入射角が臨界角を越える写真-4.2.4, 4.2.5 は、後者が入射SV波を示す駒を中心に編集されている以外は、入射波の透過と反射に関して同じ性質の応答を示している。入射角が臨界角を越えているにもかかわらず、E p - I 層内では自由境界の場合に現われたような特徴のある縞模様の応答は生じない。図-2.2.3 (b)から、SV波の入射角が $\gamma = 36.4^\circ$  のとき層境界の $\tau_{\max}$ の応答比は 1.0である。

写真-4.2.4 の  $112.5 \mu\text{sec}$  と  $125 \mu\text{sec}$ 、および写真-4.2.5 の  $90 \mu\text{sec} \sim 115 \mu\text{sec}$  の駒に、E p - I 側の層境界へ入射SV波の縞模様がそのままの縞次数で達していることが、それを示す応答として現われている。

図-2.2.3 (a)によると、 $\tau_{\max}$ について透過P波および透過SV波の透過係数は、それぞれ0.14および0.55である。したがって、上で述べたようにE<sub>p-I</sub>とE<sub>p-II</sub>の光弾性感度が等しいとすると、それぞれの透過波の最大縞次数は $N_0^H=2.53$ であるから、

透過P波の最大縞次数： $0.14N_0^H=0.35$ ,  $0.14N_0^R=0.26$ ,

透過SV波の最大縞次数： $0.55N_0^H=1.4$ ,  $0.55N_0^R=1.0$

となり、等色線縞模様写真の層境界付近の結果にほぼ一致している。

なお、透過波の透過角（層境界と透過波面のなす角度）を測定しても、透過波の伝播速度が分かるから前項で述べた材料性質を検定することができる。

写真-4.2.6 は平行三層を構成している非均質地盤模型の場合である。0 $\mu$ secの駒で明らかなように、中間のE<sub>p-II</sub>層には模型を作成する段階でかなりの初期応力が導入されている。E<sub>p-III</sub>の最上層への透過波は明瞭に示されているが、その縞次数を読みとるのは困難である。すでに述べた粘性減衰効果が両層に及ぶから、ここで用いた層厚で三層問題を実験することは適当でないと思われる。

図-4.2.2 に、2.2.1.4)で述べたStoneley waveの存在領域を示す。ここには、両層のポアソン比がともに0.3の場合と0.4の場合を示した。存在領域は $\rho_2/\rho_1=1.0$ 付近で図示の領域Iおよび領域IIに別れている。図中に示したように、本実験の二層模型、三層模型いずれの場合も層境界の条件が存在領域から外れるから、Stoneley waveは発生しないことが分かる。

#### 4. 2. 3. スリットを有する地盤模型の場合

##### 1) 平面波が入射する半無限スリット付近の波動挙動

図-4.2.3 (a), (b), (c)に、半無限スリットへ平面波としてP波またはSV波が入射した場合について、スリット底Qおよびスリット側面から発生する各種波動の波面を示す<sup>4-1)</sup>。このような設定は、亀裂とその先端を含む領域に平面波が入射する場合にも対応している<sup>4-2)</sup>。

図-4.2.3 に示されているように、入射側のスリット側面からは入射波に対応して二種類の平面反射波が、またスリット底Qからはその点を中心とする同心円の波面を持つ円筒P波とSV波が発生する。この円筒波のうちスリット両側面に沿って伝播するP波により、平面波面を持つhead waveが発生する。また、スリット底Qの隅角部からはRayleigh波も発生してスリット両側面を伝播し、さらにSV波が入射側のスリット側面に対して臨界角を越えて入射する場合（図-4.2.3 (c)）には、入射側の側面に反射SP波が発生する代わりに表面波が発生するはずである。

したがって、スリット底のような特異な部分を持つ場合には、直線自由境界のみの場合とかなり異なった波動挙動を示し、また入射波に対してスリットで遮蔽される部分における波動挙動も明らかになるであろう。



図-4.2.4 に、2. 1. 4. 4) で述べた平面SV波が自由境界へ入射する場合の、自由境界に沿うSV波波面の見かけの速度 $C_{TA}$ を表わす。そこで述べたように、図-3.2.3 (c)の円筒SP波の速度( $C_L$ )より $C_{TA}$ が遅い場合(入射角が臨界角を越える)には、入射SV波によって表面波が発生する。

図-4.2.5 (a)に、直線境界上で少量の爆薬の爆発によって生じた、円筒P波、head wave (von Schmidt waveとも呼ばれる)、円筒SV波、Rayleigh 波の、明視野モノクロの等色線縞模様写真の例を、(b)にRayleigh 波による自由境界上の縞次数分布を示す<sup>4-3, 4)</sup>。

この写真例では、円筒P波および head wave はあまり明瞭でないが、円筒SV波の後方の自由境界付近にRayleigh 波が極めて明瞭に示されている。Rayleigh 波は進行方向(右側)の縞次数 $N = 3.0$ と左側の縞次数 $N = 2.0$ を囲む縞模様と、その間の境界からやや内部寄りの縞次数 $N = 2.5$ を囲む縞模様とで構成されている。縞次数分布図(b)から、図では判読しにくいが高左右の高い縞次数の間に0次の点があることが分かる。これらの等色線縞模様の形は自由境界に波源を持つRayleigh 波の典型である。

## 2) スリットを有する模型の等色線縞模様写真

地盤模型M1002, M1003, R1004についてのLおよびR端衝撃により、スリット側面に対していずれも臨界角を越えた三種類の入射角による応答が得られる。写真-4.2.7 ~4.2.11に、それらの等色線縞模様写真を示す。

表-4.2.1 に、それぞれの場合について入射側のスリット側面である自由境界へのP波およびSV波の入射角と反射角を示す。また、それぞれの入射波による自由境界の $\tau_{MAX}$ の応答比と反射係数を2. 1. 4. によって示す。

表-4.2.1 スリット側面への入射角と反射角および応答比と反射係数

写真番号	入射P波		反射SV波(P S)		入射SV波	
	入射角	応答比	反射角	反射係数	入射角	応答比
4.2.7	74.2°	2.0	32.3°	1.5	90.0°	0.0
4.2.8, 4.2.9	56.0°	1.8	27.5°	2.0	71.8°	0.6
4.2.10, 4.2.11	37.8°	1.2	20.0°	2.0	53.6°	0.5

入射P波の応答比： $[\tau_{MAX}]/\tau_{P0}$ ，入射SV波の応答比： $[\tau_{MAX}]/\tau_{S0}$

### (1) 写真-4.2.7 について ( $\theta = 74.2^\circ$ , $\gamma = 90^\circ$ )

25  $\mu$  sec で最大縞次数約 0.8次の入射P波がスリット底に到達する。入射P波のスリッ

ト側面への入射角は $74.2^\circ$ である。

$50\mu\text{sec}$  から  $75\mu\text{sec}$  の P 波の入射場において、スリット軸を対称軸とするような左右ほぼ対称な直線波面が見える。向かって右側のスリット側面から伸びる最大縞次数約 1.0 次の直線波面は、入射 P 波面の先端と入射側のスリット側面との交点で鋭く尖った縞模様と一体となる様子から、入射 P 波による反射 SV 波 (PS) の波面であり、スリット側面上の縞次数の入射 P 波の縞次数に対する応答比は約 2.0 である。一方、スリット左側面から伸びる最大縞次数約 0.7 次の直線波面は、その側面に P 波は入射しないから反射 PS 波ではあり得ない。したがって、これはスリット底 Q で発生した円筒 P 波による head wave でなければならない。ただし、円筒 P 波と円筒 SV 波そのものの波面は視認できない。

図-4.2.3 (a) から判断されるように、入射 P 波のスリット軸への入射角が大きいため、スリット右側の PS 波面と左側の head wave 先端とがほぼ同じ位置にあるように見えるが、詳細に観察すると右側の PS 波面の先端がやや先行している。また、これら両波面のスリット軸との交角は、前者 (PS) が  $32^\circ$ 、後者 (head wave) が  $34^\circ$  でそれぞれ理論値に一致する。したがって、スリット軸に対して対称に見える波面の発生メカニズムはそれぞれ異なっている。ただし、反射 SV 波には右側面に存在する head wave の寄与も重ね合わされていると考えられる。

$62.5\mu\text{sec}$  から  $75\mu\text{sec}$  の駒において、スリット右側面上でスリット底と上記の PS 波面の先端の間に暗部の縞模様が見える。この縞模様は存在位置から考えて Rayleigh 波の存在を示すものと思われるが、縞次数は head wave によるものより低く縞模様の詳細は判読できない。

スリットによる入射 P 波の遮蔽領域 (shadow zone) は、この場合は入射角が大きいため明瞭でなく、見かけ上は入射波面がそのまま伝播しているように見える。

$75\mu\text{sec}$  以後、スリット軸に垂直の波面を持つ入射 SV 波がスリット底に到達し SV 波の入射場となる。

単独に SV 波が入射する場合はスリット軸に対して対称な応答を示すはずであるが、先行する P 波の応答が対称でないこととスリット開口部の自由境界からの反射波により、写真に見られるように対称な応答を示さない。

SV 波がスリット軸に平行に入射する場合 ( $\gamma = 90^\circ$ )、図-4.2.3 (c) から明らかなように SP と SS は存在しないから、スリット側面の応答を支配する波動は head wave と Rayleigh 波である。

$87.5\mu\text{sec}$  および  $100\mu\text{sec}$  の駒に、スリット両側面に沿って入射 SV 波面に先行する形の head wave の縞模様が見える。ただし、この場合は直線波面を形成せず、見かけは半円形の暗線となっている。その半円形の内部に Rayleigh 波によるものと考えられる応答比約 1.0 の高次 (2.5 次) の最大縞次数を持つ縞模様が形成される。

この縞模様はスリット両側面の同じ位置にあり、両側面にまたがって浅く短いチョウチヨ形の分布<sup>4-2)</sup>を示し、 $112.5\mu\text{sec}$  から  $150\mu\text{sec}$  の駒では入射 SV 波とほぼ同じ速度

で伝播する。高速カメラ系による等色線縞模様写真ではこの縞模様の詳細は判読できない。

175  $\mu$ sec以後では、この縞模様が開口部に達した後再びスリット側面に沿ってスリット底方向に伝播していることが分かる。

ここで行なったスリット軸に対する入射角の場合、スリット側面近傍においては、P波の入射場ではRayleigh波より反射SV波と head wave の応答が支配的である。また、SV波の入射場では head wave よりRayleigh波の応答が支配的である。

(2) 写真-4.2.8 および写真-4.2.9 について ( $\theta = 56.0^\circ$  ,  $\gamma = 71.8^\circ$  )

両写真は同じ状態を示すが、実験系の違いにより視野内で入射パルスの伝播方向が逆になっている。繰り返し入力系の写真-4.2.9 は、入射波の伝播にともなって視野を移動している例である。

①写真-4.2.8 について：

P波のスリット側面への入射角はこの場合 $56^\circ$  であるから、表-4.2.1 によるとPSの反射係数は約 2.0であり、入射側の反射SV波の最大縞次数も約 1.5次で写真-4.2.7 の場合より高くその波面は明瞭である。一方 head wave による波面の最大縞次数は約 0.5次で写真-4.2.7 の場合より低い。

Rayleigh波による縞模様は、(1) で示した場合よりこの場合の方がかなり明瞭で、最大縞次数は約 0.4次である。

50  $\mu$ sec および62.5  $\mu$ sec の駒に、入射P波の遮蔽領域と円筒P波面の状態が(1) の場合よりはっきり視認される。

75  $\mu$ sec 以後からはSV波の入射場となる。この場合、図-4.2.3 に示した入射側のスリット側面の見かけの速度 $C_{Ta}$ は1,150m/secであり、表面波が発生する。

SV波に対して非入射側のスリット左側面については、縞次数にやや違いはあるが(1) で述べたとほぼ同様の縞模様および応答が生じている。一方、SV波に対して入射側であるスリット右側面では、反射SV波、head wave、表面波およびRayleigh波が混在し、スリット左側面とはまったく異なる縞模様を示している。しかし、112.5, 125  $\mu$ sec の駒の視野などの関係から判断しにくい点があるので、これらの応答を同じ状態を示す繰り返し入力系による写真-4.2.9 をもとに検討する。

②写真-4.2.9 について：

この写真ではスリット左側面が入射側である。左の2列の20~90  $\mu$ sec の駒はP波の入射場を示し、右の2列の70~110  $\mu$ sec の駒がSV波の入射場を示している。

P波の入射場にはすでに述べたと同様の応答が認められる。

SV波の入射場の90  $\mu$ sec の駒には、スリット両側面に head wave およびRayleigh波による縞模様が見える。これ以後の時間の駒で明らかなように、スリット左側面には入射SV波面を挟んで前後(写真視野では上下)に表面波によると考えられる縞模様が分布している。

左側面の head wave 後方で、入射SV波面の延長線上に見える表面波の最大縞次数(

1.3次)の位置は、右側面(非入射側)のRayleigh波のそれ(1.5次)より先行し、また左側面の反射SV波面後方の表面波のそれ(1.2次)は遅れている。これらの最大縞次数の入射波の最大縞次数に対する縞次数比はそれぞれ0.71, 0.82, 0.65である。

スリット左側面の上下に分かれた表面波の縞模様は、入・反射SV波面と暗線で区切られる形で存在する。一方、右側面では入射SV波が遮蔽された120 $\mu$ sec以後ではつきりするように、Rayleigh波の縞模様の中央に向かって暗線が伸びている。この構成は(1)で現われたチョウチョ型の片方の縞模様と同じパターンであり、この縞模様の形が、平面SV波がスリット底のような幾何学的な条件を持つ部分へ入射するとき、非入射側の自由境界を伝播するRayleigh波の、図-4.2.5(a)に対応する典型的パターンであると推定される。また、入射側の自由境界では入・反射SV波、入射SV波による表面波が存在するため、図-4.2.5(a)の場合と異なるが、前後の表面波部分が自由境界上の暗点(0次)で区切られる縞模様である点でよく似たパターンを示している。

結局、ここでの入射角のSV波の入射場について、入射側のスリット側面では、入射SV波によって発生する表面波が応答を支配し、非入射側のスリット側面ではRayleigh波による応答が支配的である。ただし、スリット底で発生したRayleigh波が入射側のスリット側面の応答にどの程度寄与しているかをこれらの写真から判断することはできない。

(3)写真-4.2.10および写真-4.2.11について( $\theta=37.8^\circ$ ,  $\gamma=53.6^\circ$ )

この場合も、二枚の写真における入射波の方向は前者がスリット右側面へ、後者が左側面へと逆である。

①写真-4.2.10について:

P波の入射場における入射側のスリット側面の反射SV波およびRayleigh波の縞模様は(2)の場合より鮮明になる。また、非入射側のhead waveの縞模様はほとんど視認できないが、Rayleigh波のそれは逆に明瞭になる。入射P波の遮蔽領域も(2)の場合よりはつきりする。

SV波の入射場において、非入射側の側面にはあまり大きな縞次数の縞模様は現われず、入射側の側面では反射SV波後方にのみ高い縞次数の縞模様を持つ表面波が現われる。詳細は(2)と同様に繰り返し入力系の等色線縞模様写真により検討する。

②写真-4.2.11について:

SV波の入射場について、105 $\mu$ sec以後のスリット右側面(非入射側)にはhead waveとしての縞模様はほとんど識別できず、縞模様の形は円筒P波の波面と見る方が自然であろう。(2)で述べたRayleigh波の縞模様は最大縞次数約1.2次(縞次数比0.65)であり、(2)の場合よりやや低い。

入射側のスリット側面について(2)で述べた応答と比較すると、先行する表面波の最大縞次数は約0.3次(縞次数比0.16)で極めて低くなり、一方反射SV波の後方の表面波の最大縞次数は約1.5次(縞次数比0.82)と増加している。また、右側面のRayleigh波と左側面の表面波を形成している縞模様の最大縞次数の位置はスリットを挟んでほぼ同じ

である。しかも、入射SV波面の延長線がスリットと交わる点とこの最大縞次数の中心点との距離は時間とともに増加する。この原因はスリットへの入射角が(1)、(2)の場合より小さく、スリット側面における入射SV波の見かけの速度が1,350m/secに増加したためである。このことは、左側面の後方の表面波がRayleigh波と同じ伝播速度を持つ表面波であることを示唆している。

入射SV波に対するスリットの遮蔽効果は明確で、この遮蔽領域内には上記の波動のほかに円筒SV波も存在するはずであるが識別できない。

### 3) 半円形のスリット底を持つスリット模型の等色線縞模様写真

上記1)、2)でスリットに対する波動応答を考える場合、スリット底の幾何学的な形状については何も言及していない。暗黙のうちにスリット幅は狭く、スリット底は鋭い隅角を持つ形状であり、当然図-4.2.3に示した波動が発生すると考えてきた。

しかし、すでに示したようにここで用いた模型のスリット底からRayleigh波を含めて各種の波動が発生しており、これらの波動、特にRayleigh波がどの程度の鋭さを持つ隅角部から発生するのか疑問である。そこで、上記のスリットに対する応答と比較する目的で、図-4.1.1に示したような半径5mmの半円のスリット底を持つスリット模型(R1004)について、(1)および(3)の入射角に対応する実験を行なった。

幾何学的形状の長さに対するパラメータは、一般に入射波の波長などを基準値として表わされる。直角隅角の鋭さを曲率半径で評価するために、いま、模型M1002などに設けたスリット底の1.5mm隔たった直角隅角を、模型制作上の制限を考慮して、それぞれ半径0.25mmの四分の一円弧と仮定する。一方、入射SV波のパルス長は約50mmである。入射パルス長に対する半径0.25mmと半径5mmの円弧の曲率半径の比は、それぞれ0.005、0.1となる。

#### (1) 写真-4.2.12について ( $\gamma = 90^\circ$ )

この写真はSV波の入射場の波動応答を示している。この場合は入射SV波の最大縞次数は約2.0次である。

写真-4.2.7と比較すると、head waveの現れ方、入射SV波面の延長線とスリット側面の交点付近に現われるRayleigh波の縞模様がやはりチョウチョ模様を示し、その部分に向かって暗線が伸びる点などほぼ一致している。この場合のRayleigh波部分の最大縞次数は1.5次(縞次数比0.75)で写真-4.2.7の場合よりやや低い。

#### (2) 写真-4.2.13について ( $\gamma = 53.6^\circ$ )

この写真は写真-4.2.11と視野と時間がそのまま対応する。両者のスリット側面付近の縞模様は極めてよく一致している。特に、前項2)(2)で述べた非入射側の自由境界に現われるRayleigh波の縞模様の典型的パターンが、入射SV波が十分に遮蔽された120 $\mu$ sec以後に認められる。この縞模様は写真-4.2.11では明瞭でなかった。

以上のことは、スリット底がこの程度（入射SVパルス長を基準値として1/10）の幾何学的な割合の曲率半径であれば、平面SV波が入射したとき円筒波およびRayleigh波が発生することを意味している。しかし、どの程度の曲率半径まで同じ応答を示すか、またはそのような応答を生ずるメカニズムなどについては後で議論する。

#### 4) スリットを有する地盤模型の応答特性

以上の考察をもとにスリットを有する地盤模型の応答特性は、本実験の範囲では以下のようにまとめられる。

##### (1) P波入射場について

①入射側のスリット側面では、直接P波が入射することによる応答比が2.0で最大であり、その大きさは入射角に対する理論応答比にほぼ従う。

②非入射側のスリット側面では、入射角が大きいときスリット底で発生する円筒P波によって形成される head wave による応答が支配的で、Rayleigh 波の応答は小さいが、入射角が減少するとスリット底から発生するRayleigh 波による応答の方が head wave による応答より大きくなる。

##### (2) SV波入射場について

①非入射側のスリット側面では、入射SV波によりスリット底から head wave とRayleigh 波が発生するが、後者による応答が支配的である。その応答比はスリット側面への入射角が増加すると増加し、スリット軸に平行に入射する ( $\gamma = 90^\circ$ ) 場合が最大で、ほぼ1.0である。また、このような場合に特有のパターンを持つ表面波 (Rayleigh 波) の縞模様が現われる。

②入射側のスリット側面では、臨界角を越えた入射SV波によって head wave と表面波が発生する。この表面波は入・反射波面で前後に分けられ、入射角が減少すると後方の表面波による応答が支配的となる。また、この表面波は縞模様の構成の上で自由境界に波源を持つRayleigh 波に似ており、Rayleigh 波と同じ速度で伝播する。

##### (3) スリット底の形状について

スリット底を持つスリットに平面波が入射する場合、スリット底の形状が鋭い隅角でなく円弧の場合でも、ここで行なった入射パルス長と半径の比に対しては、円筒波、 head wave, Rayleigh 波が発生し得る。

#### 4. 2. 4. スリットを充填した非均質地盤模型の場合

非均質地盤模型M1302, M1303は均質地盤模型M1002, M1003のスリットに、E p - I との特性抵抗比が0.4である模型材料E p - IIIを充填して作成した。

写真-4.2.14~4.2.17にこれらに対する等色線縞模様写真を示す。

ここでは、これらの地盤模型に対する波動応答を、4. 2. 3. で述べたスリット模型

の応答と比較する。

E p - III を充填する前後を写真番号で対応させると、

4.2.7 → 4.2.14, 4.2.8 → 4.2.15, 4.2.10 → 4.2.16, 4.2.11 → 4.2.17

である。

しかし、これらに対応させて比較すると両者の応答は全く異なり、むしろ基準模型（写真-3.4.3）あるいは模型 M1001（写真-4.2.1）の応答に近いことが分かる。

（1）写真-4.2.14（ $\gamma = 90^\circ$ ）について：

P波の入射場において、入射P波面および自由境界からの反射SV波面は、スリット側面の初期応力の影響と区別できない程度の乱れしか認められない。しかし、P波の非入射側境界の head wave および入射側境界の反射SV波面は微かに認められる。

SV波の入射場における  $87.5 \mu\text{sec}$  以後の駒で、スリットと入射SV波面の交点付近で head wave と考えられる縞模様が小さく認められ、また入射波面もわずかに写真-4.2.7の場合と同様な形に曲がる。

（2）写真-4.2.15（ $\gamma = 71.8^\circ$ ）について：

この場合はP波の入射場において、head wave およびスリット境界からの反射SV波面は、上記の写真-4.2.14の場合よりやや明瞭である。

SV波の入射場では、写真-4.2.14の場合より均質模型の応答に近く、特に  $137.5 \mu\text{sec}$  から  $175 \mu\text{sec}$  における自由境界の応答は、充填されたスリット部を通過するにもかかわらず、写真-3.4.3 に示した特徴ある縞模様の形をそのまま保っている。

（3）写真-4.2.16および写真-4.2.17（ $\gamma = 53.6^\circ$ ）について：

P波の入射場の応答の傾向は写真-4.2.15の場合と同様である。

SV波の入射場では、両写真とも反射SV波面が認められる。また、写真-4.2.17の場合は自由境界に対して臨界角を越え、 $150 \mu\text{sec}$  以後で写真-4.2.15の場合と同じ状態になることが示されている。

以上、特性抵抗の低い材料でスリットを充填した場合の波動応答を等色線縞模様写真から検討した結果、head wave などスリット模型の応答と同様の傾向を示す場合もあるが、この程度の特性抵抗比およびスリット幅（入射SVパルス長の約 3/100）に対しては、定量的に応答比の変化を特定できる程度の差は認められなかった。

図-4.2.6 (a), (b)に、スリット底を無視し薄い E p - III 層を半無限の E p - I 層で挟んだ3層問題と考え、透過側および入射側の境界付近の入射SV波による  $\tau_{\text{MAX}}$  の応答比（ $\tau_{\text{MAX}}/\tau_0$ ）を入射角に対して示す。ただし、入射波は波長 150mm（スリット幅の 100倍）の調和波とした。実線は境界上の、破線は境界から 5mm の位置における値である。

両境界上の応答比は本実験の入射角に対して差があるが、境界から 5mm 離れた位置で  $\gamma = 71.8^\circ$  のとき透過側で 0.8 となる以外はほぼ 1.0 であり、3層問題と考えた動光弾性実験による縞模様が上記のような応答となることが理解される。結局、この程度の特性抵抗

比およびパルス長と層厚比に対して、波動はこの層の存在にほとんど影響されずに通過すると考えられる。

#### 4. 2. 5. 直角二等辺三角形の突起を持つ地盤模型の場合

地盤模型R1005およびR1006は、それぞれ高さが入射SVパルス長およびその1/2の直角二等辺三角形の突起を一つおよび二つ持つ場合で、地表の不整形状態の一つを代表している。

##### 1) 写真-4.2.18および写真-4.2.19について

(1) 写真-4.2.18は、模型R1005をL端衝撃した場合のSV波の入射場に対する等色線縞模様写真を示す。

この場合、直角二等辺三角形の底辺に垂直入射するから、斜辺に対してSV波の入射角は $45^\circ$ となる。すでに述べた波動理論によると、図-2.1.11などに示されているように、自由境界への入射角が $45^\circ$ のとき $\tau_{\text{MAX}}$ の応答は必ず0にならない。

140 $\mu\text{sec}$ 以後の駒では、入射SV波面と交わる自由境界の縞次数は内部のそれよりほぼ0まで急激に減少し、理論通りの応答を示している。

160 $\mu\text{sec}$ 以後の駒には、両斜辺からの反射SV波(SS)の波面が底辺に垂直に形成され、170 $\mu\text{sec}$ で丁度三角形の頂点を通る二等分線上で重なり合い、互いに打ち消しあって縞模様がほとんど消える。

185 $\mu\text{sec}$ 以後は、これらSSが再び両斜辺で反射しSSSとなって入射方向と逆方向に伝播する。

SV波が三角形部分へ入射し始めて逆方向に伝播する間、三角形の頂点ではほぼ応答が0である。一般に、平面実体波が鋭角三角形の鋭角へ向かって伝播するとき、全ての実体反射波は必ず途中から逆方向へ向かうことは作図により簡単に示せる。いまの場合、直角三角形でありこの状態となる一つの極限である。したがって、三角形の頂点へは表面波以外は到達しない。

150 $\mu\text{sec}$ 以後の駒において、入射SV波面の後方の視野左側の自由境界を、表面波と考えられる縞模様が頂点に向かって伝播している。この縞模様はスリット模型において、SV波入射場で入射側の側面の入射SV波後方に発生した表面波と同じであり、この場合は三角形部分の立ち上がりの隅角から発生したものと推定される。

(2) 写真-4.2.19は、模型R1005をR端衝撃した場合のSV波の入射場に対する等色線縞模様写真である。

この場合、SV波の入射角は直角三角形の視野左の斜辺に対しては $81.4^\circ$ 、右の斜辺に対しては $8.6^\circ$ である。

100 $\mu\text{sec}$ 以後の駒には、基準模型をR端衝撃した場合に現われた表面波を含む典型的な



縞模様の入射SV波面が、三角形部分の左隅角へ入射する場合の縞模様の変化が  $5\mu\text{sec}$  間隔で明瞭に示されている。

$115\mu\text{sec}$ 以後、左斜辺に沿って左隅角からの head wave とその後方に表面波 (Rayleigh 波) の縞模様が現われる。これらの縞模様の発生の様子およびその後の挙動は、入射SV波面を含めて、自由境界への入射条件が相違しているにもかかわらず、写真-4.2.9 ~12に示されているスリット模型のスリット側面に現われた縞模様の挙動に極めてよく似ている。特に、入射SV波面との関係において写真-4.2.9 の非入射側のスリット側面の縞模様の挙動に近い。写真-4.2.19の場合は左斜面に対してSV波が直接入射するが、スリット模型の場合にはSV波が直接入射できない非入射側であることを考えると、この類似性は意外である。ただし、反射SV波面の後方に暗線で区切られたもう一つの表面波が発生していることは、スリットの場合の入射側の側面の挙動と同じである。

入射SV波面の挙動について、三角形部分の左隅角へ入射した直後の  $115\mu\text{sec}$  までは、自由境界付近に同心長円状の高い縞次数 (約 1.8次, 応答比 1.0) を持つ縞模様を保つが、その後は次第に長軸が長くなり中心部の最大縞次数を減少しながら三角形部分の内部に移動する。その際、入射方向はほぼ三角形の左斜辺に沿う方向であるにもかかわらず、この最大縞次数の位置は三角形の底辺に沿う方向に移動する。

三角形部分の自由境界の応答については、 $180\mu\text{sec}$ で左斜辺のRayleigh 波が頂点に達し、反射して左隅角へ向かう途中で最大応答比 1.0を示す。また、右斜辺では左斜面の最大応答の位置にほぼ対応する位置で、同じ時間に約 0.8の最大応答比を示す。

$130\mu\text{sec}$ から三角形部分の入射SV波面の後方には、左隅角からの円筒SV波面が広がる状態が認められる。

## 2) 写真-4.2.20について

写真-4.2.20は、模型R1006をR端衝撃した場合のSV波の入射場に対する等色線縞模様写真である。

1) の (2) の場合とは三角形の高さが異なるために、同じ性質の挙動を示す時間が異なるのみで、左右の三角形に対して (2) の場合とほぼ同様の挙動を繰り返し示している。

この場合も左右それぞれの三角形部分に対して、左隅角部への入射波の入射状態、入射波の最大縞次数の位置の移動方向、隅角からの表面波および円筒波の発生状態などはほぼ等しい。

最大応答は、左の三角形に対して  $100\mu\text{sec}$  , 右の三角形に対して  $140\mu\text{sec}$  で写真-4.2.19の場合と同様に表面波によって生じ、三角形の頂点を挟んで左右の斜辺に対称的に現れ、応答比は約 1.0である。

## 4. 2. 6. 段差のある不整形な地盤模型の場合

模型M1007～M1010は段差のある地盤模型で、立ち上がり部が隅角であるか円弧であるかの違いはあるが、いずれも入射SVパルス長の  $4/5$  (4cm) の高低差の段差である。

#### 1) 隅角で構成された段差を持つ模型の等色線縞模様写真

写真-4.2.21, 4.2.23, は、それぞれ直角隅角を持つ模型M1007をLおよびR端衝撃した場合の、SV波の入射場の等色線縞模様写真である。写真-4.2.27は、やはり直角隅角を持つ模型M1009をR端衝撃した場合のP波およびSV波の入射場の等色線縞模様写真である。写真-4.2.28は、開角  $120^\circ$  の隅角を持つ模型M1010をR端衝撃した場合のSV波の入射場の等色線縞模様写真である。

最初の二つの模型の段差部分に対してSV波は、L端衝撃のとき平行に入射 ( $\gamma=90^\circ$ ) し、R端衝撃のとき模型M1007には  $\gamma=126.4^\circ$  (直接入射しない) で、M1009には  $\gamma=53.6^\circ$  で入射する。また、模型M1010をR端衝撃するとき  $\gamma=96.4^\circ$  (直接入射しない) で入射する。

ただし、 $\gamma>90^\circ$  の場合は、その自由境界へ波面が直接入射しないから、以下ではその場合を負 ( $90^\circ - \gamma$ ) の入射角と呼ぶ。

##### (1) 写真-4.2.21および写真-4.2.27について

両者の段差部分の応答は予想されるように、それぞれSV波が  $\gamma=90^\circ$  および  $53.6^\circ$  で入射する場合のスリット側面における応答とほぼ同じである。ただし、写真-4.2.27の場合は  $175\mu\text{sec}$  の駒に見られるように、段差の上端へ臨界角を越えた入射波が到達するため縞模様の形が異なる。

##### (2) 写真-4.2.23および写真-4.2.28について

両者とも段差部分へのSV波の入射角は負であり、入射角だけでみれば写真-4.2.23の場合は写真-4.2.11の非入射側スリット側面に対するのと同じである。しかし、写真-4.2.23の隅角の立ち上がり部へSV波が入射して  $25\mu\text{sec}$  後の  $155\mu\text{sec}$  の駒の縞模様と、写真-4.2.11のスリット底へSV波が入射して  $25\mu\text{sec}$  後の  $115\mu\text{sec}$  の駒の非入射側スリット側面における縞模様を比較すると、前者と後者のRayleigh波の縞模様の最大縞次数比は、それぞれ0.82と0.64で前者が大きい。

一方、写真-4.2.28の段差部分の表面波の縞模様は、写真-4.2.19の左斜辺の縞模様によく似ているが、写真-4.2.23のそれは表面波後方にもう一つの暗線で区切られた表面波を伴わない点異なる。

#### 2) 平面SV波が隅角へ入射した場合の表面波の応答

本節の4.2.3.において、スリット底が近接した隅角で構成されていると考えと、4.2.5., 6.の場合と同様に、平面SV波が隅角へ入射して平面波を発生するという意味で同じ状況である。そこで、スリット側面、直角三角形の斜辺および隅角を持つ段

差部分の波動応答を比較する。

図-4.2.7 (a)~(g)に、SV波が隅角に達した後約 $30\mu\text{sec}$ における自由境界の縞次数比の分布を示す。この図では、注目する自由境界は隅角を下端としてすべて垂直に表わされ、スリットの場合は両側面の、斜辺および段差の場合はその自由境界の縞次数比を、写真の視野通りに自由境界から内部へ向かって示している。図中に写真番号と自由境界への入射角 $\gamma$ を、括弧内にその縞次数比を読みとった駒の時間を示す。

ここに示した縞次数比はSV波が隅角へ入射した後約 $30\mu\text{sec}$ の値であるから、必ずしも応答が最大になるときの縞次数比ではない。

たとえば、図-4.2.7 (b)におけるスリット左側面の縞次数比の形の意味は、上端の0でhead waveの先端を表わし、次いで先行する表面波による極値が現れ、暗点を経て後続の表面波(Rayleigh波)が示され、隅角部で応力集中により再び増加することを示す。したがって、図の(f)の縞次数比の変化は、先行する表面波しか現われないことを意味している。ただし、ここでは隅角による応力集中の値は正確に読み取れないこともあり、考察の対象としない。

図-4.2.7 から、自由境界に対するSV波の入射角が $90^\circ$ に近いか負の入射角の場合には、後続の表面波の縞次数比が先行する表面波のそれより低い点で、非入射側のスリット側面と同じ傾向を持つと推定される。この意味で $\gamma=126.4^\circ$ である(f)の応答は後続の表面波が現われないことで特異であるがその原因は明かでない。また、図-4.2.7 (d), (e), (g)から、SV波が隅角へ入射する以前に臨界角を越えている場合((d), (g))と越えていない場合(e)とは、前者の先行する表面波の縞次数比が後者のそれよりやや高い程度で、それほど差はないと考えられる。

### 3) 段差の立ち上がり部が円弧である地盤模型の場合

模型M1008は模型M1007またはM1010のO点を中心とする半径40mmの円弧で段差の立ち上がり部を形成している。

写真-4.2.22, 4.2.25は模型M1008をL端衝撃した場合の、写真-4.2.24, 4.2.26はR端衝撃した場合の等色線縞模様写真を、それぞれ繰り返し入力系および高速カメラ系の撮影例について示した。

この場合は、凹型の円弧の自由境界に対してSV波の入射角が時間とともに漸変することが1)で示した隅角を持つ段差模型の場合と異なる。写真-4.2.22および4.2.25は入射角が $0^\circ \sim 90^\circ$ まで、写真-4.2.24および4.2.26は $36.4^\circ \sim 90^\circ \sim 126.4^\circ$ まで滑らかに変化する。高速カメラ系の写真からは縞模様の変化が読みとり難いため、以下では主として繰り返し入力系による写真をもとに応答を検討する。

SV波の入射角が $\gamma_0 \leq \gamma \leq 90^\circ$ の範囲で変化するとき、2.1.4.4)で述べたように、入射角によって粒子運動などから区別される二種類の表面波が発生する。以下では① $\gamma_0 \leq \gamma \leq 45^\circ$ で発生する表面波を表面波1、

②  $\gamma > 45^\circ$  で発生する表面波を表面波 2 と呼ぶ。

(1) 写真-4.2.22について

入射 S V パルスのピーク位置の入射角は  $130 \mu\text{sec}$  で臨界角を越え、 $140 \mu\text{sec}$  で  $45^\circ$  を越える。  $130 \mu\text{sec}$  以後、入射 S V 波により最大応答比約 1.0 の表面波が形成され、 $145 \mu\text{sec}$  付近から反射 S V 波で入射波と分離されながら円弧自由境界を伝播する挙動が克明に示されている。この表面波は明らかに表面波 1 である。また、 $145 \mu\text{sec}$  以後、自由境界に沿って入射波面の延長線上にも別の表面波が形成されつつある。これは表面波 2 と考えられるが詳細は別の例で検討する。

この写真の円弧自由境界付近の縞模様の挙動は、直角隅角を持つ写真-4.2.21の場合と大きく異なり、写真-4.2.11の入射側のスリット側面の挙動に近い。

(2) 写真-4.2.24について

入射 S V パルスのピーク位置の入射角は  $140 \mu\text{sec}$  で  $45^\circ$  を越え、 $155 \mu\text{sec}$  で  $90^\circ$  を越える。 $145 \mu\text{sec}$  で反射 S V 波面の後方に応答比 0.65 の表面波 1 が全貌を表わし、同時に円弧自由境界に沿う入射 S V 波面の前方に head wave 波面が形成されているのが認められる。この head wave はこれ以後の時間で入射波面より早い速度で先行する。

表面波 1 の先端が入射波の入射角  $45^\circ$  に対応する位置に来る  $150 \mu\text{sec}$  以後で急速に縞次数を減じ、その後は低い縞次数のままで暗線で区切られた形のみが残る。

入射波の入射角が負になる  $155 \mu\text{sec}$  以後、head wave の後方で円弧自由境界と入射波面の間に表面波 2 が形成され、時間とともに次第に応答比が増加し、 $175 \mu\text{sec}$  で最大応答比 1.1 に達する。

さて、上記のように head wave が現われることは、写真では読み取れないがどこかで円筒 P 波が発生していることを示している。すでに述べたように、スリット底のような鋭い隅角部へ平面波が入射した場合に円筒波が発生することは認められている。また、4. 2. 3. 3) における実験によって、半径の小さい円弧のスリット底からも円筒波が発生することが確かめられている。その場合の半径は入射 S V パルス長の  $1/10$  であった。

いまの場合、円弧半径とパルス長の比は  $4/5$  であり、幾何学的に鋭い変化が存在すると考えることはできない。したがって、円筒波が発生する原因はその意味の幾何学的形状でなく、S V 波の入射角が変化することに求められなければならない。円筒波の発生場所およびそのメカニズムについては次節で述べる。

(3) 写真-4.2.33について

模型 R 1 0 1 4 は段差の立ち上がり部と上端部を、それぞれ曲率中心が逆方向にある半径  $40\text{mm}$  の二つの円弧を接続して作成されており、R 端衝撃による O 点への入射角は  $\gamma = 81.4^\circ$  である。したがって、円弧境界への S V 波の入射角は  $36.4^\circ \sim 81.4^\circ \sim 36.4^\circ$  へ滑らかに変化し、負の入射角となることはない。

写真-4.2.33は、模型 R 1 0 1 4 を R 端衝撃した場合の等色線縞模様写真で、入射波の

伝播にしたがって視野を移動し、撮影間隔が  $2\mu\text{sec}$  の駒を含む場合である。

$115\mu\text{sec}$  までの駒の縞模様の挙動は、表面波 1、表面波 2、head wave などについて写真-4.2.24 で述べた挙動と同様である。

$120\mu\text{sec}$  以後、SV 波の入射角が減少し始め、表面波 2 の応答比も減少する。また、入射 SV 波面に対する表面波 2 の最大縞次数の相対的位置は、入射角が減少すると見かけの速度  $C_{TA}$  が増加するため ( $r=36.4^\circ$  のとき、 $C_{TA}=1.7C_T$ ) 入射波面から遅れ、 $130\mu\text{sec}$  以後では入射波面の後方に位置する。このことは、表面波 2 の伝播速度が入射波と独立していることを示唆している。

ここまで示した等色線縞模様写真においては、段差の上端は隅角となっており、表面波 2 はそこで反射するか、または、入射波の入射角が途中で負となり、連続して表面波 2 を発生しながら伝播する状況を示すことができなかった。しかし、この模型においては入射角が滑らかに変化する条件の下でそれらが示されている。

#### 4. 2. 7. 曲線境界の非均質地盤模型の場合

模型 H 1 0 1 5 および R 1 0 1 6 は凹の曲線自由境界を持つ E p - I による均質地盤模型であるが、この中へ模型材料 E p - II を充填して非均質模型とする前段階であるので、ここで検討する。

##### 1) 曲線自由境界を持つ模型の等色線縞模様写真

###### (1) 写真-4.2.35 について

写真-4.2.35 は、模型 H 1 0 1 5 を L 端衝撃した場合の P 波および SV 波の入射場の等色線縞模様写真である。

この模型は、半径 150mm の円弧で形成されており、円弧部の両端が水平に作成されているので、入射角は P 波および SV 波の入射場に対して、それぞれ  $0^\circ \sim 79^\circ$  および  $0^\circ \sim 63.2^\circ$  の範囲で滑らかに変化する。

$0 \sim 75\mu\text{sec}$  までは P 波の入射場を示している。円弧の自由境界からの反射 SV 波面が弧状に現われ、入射角が増加するにつれて図-4.2.1 (a) に従って反射波の応答比が増加する。

$75\mu\text{sec}$  以後は SV 波の入射場となる。 $112.5\mu\text{sec}$  と  $125\mu\text{sec}$  の間で円弧自由境界への入射角が臨界角を越える。臨界角を越えた後の応答を詳細に検討するには、この写真からは時間間隔および視野の点でやや適当でないが、臨界角を越えた円弧自由境界に表面波 1 を含む典型的な縞模様が見られる。同じ半径の自由境界における SV 波の入射場の詳しい挙動については、次節で写真-4.2.34 を対象にして述べる。

###### (2) 写真-4.2.37 について

写真-4.2.37 は、模型 R 1 0 1 6 を L 端衝撃した場合の SV 波の入射場の等色線縞模様

写真である。

模型R1016は、半径25mmと50mmの二種類の円弧を接続して構成しており、L端衝撃の場合でも左右の円弧に対する入射角が異なる。このとき、SV波の入射角は左円弧部で $0^{\circ} \sim 90^{\circ}$ 、右円弧部で $0^{\circ} \sim 60^{\circ}$ である。

60 $\mu$ secまでは、入射SV波面の前方にP波入射によって生じた反射SV波の波面が弧状に現われている。

75 $\mu$ sec以後のSV波の入射場の駒に、左右円弧部の自由境界に対する入射角の違いによる応答の差がはっきり現われ、95 $\mu$ secに左円弧部で応答比0.9の表面波1の縞模様が確認され、右円弧部では表面波1が発生し初めている。

## 2) 曲線境界を持つ非均質地盤模型の等色線縞模様写真

ここでは、1)で示したEp-Iの均質模型の凹部にEp-IIを充填した非均質模型、H1215およびR1216の応答を述べる。曲線境界に対する入射角はすでに述べた通りである。

### (1) 写真-4.2.36について

写真-4.2.36は模型H1215をL端衝撃した場合の等色線縞模様写真である。

87.5 $\mu$ secまではP波の入射場を示している。Ep-IIを充填した部分の初期応力が障害となって透過波の縞模様が判定しにくい。62.5 $\mu$ sec以後で視野右上のEp-IIの自由境界から反射SV波(PSS)が暗線の縞模様で境界に向かう様子が見える。

境界のEp-I側では、写真-4.2.35の同じ時間の縞模様と同様の形の反射SV波が現われるが、応答比はかなり低く1.0以下である。

100 $\mu$ secからSV波の入射場となる。図-2.2.3に示されているように、この場合のSV波の入射角 $0^{\circ} \sim 63.2^{\circ}$ の範囲では透過SV波の透過係数は0.65 $\sim$ 0.40、透過P波の透過係数は $45^{\circ}$ のとき最大値0.20である。

4.2.2.で述べたように両材料の光弾性感度がほぼ等しいとすると、137.5 $\mu$ secのEp-II層内の透過SV波の縞次数の応答比はその値に近い。透過P波はSV波の前方に暗線の縞模様としてわずかに認められる程度である。

Ep-I側の境界付近の縞模様は、写真-4.2.35と比較すると150 $\mu$ secと162.5 $\mu$ secの駒で低い応答比で反射SV波など同様の縞模様が認められる。

### (2) 写真-4.2.38について

写真-4.2.38は、模型R1216をL端衝撃した場合のSV波の入射場の等色線縞模様写真である。曲線境界へのSV波の入射角は1)で述べた通りである。

65 $\mu$ secまでは写真-4.2.37と比較すると、P波の入射場の応答である反射SV波が残っているはずであるが、おそらくEp-II層で吸収されたためにその痕跡はほとんど見えない。

80 $\mu$ secからSV波の入射場となり、Ep-II層内に弧状の透過SV波面が形成される

が透過P波はほとんど認められない。

90  $\mu$ sec 以後の透過SV波の縞模様の縞次数は、(1)でも述べたように垂直入射による縞模様の部分が最大となるはずであるが、入射角の大きい左端境界付近の縞次数が高い場合がある。

この原因は、一つは左端境界付近の透過波の縞模様は透過直後の縞次数を持ち、粘性減衰をあまり受けない状態であること、他の一つは左端境界付近に入射以前から認められる初期応力の影響を受けることであろう。

E<sub>p</sub> - I 側の応答については、写真-4.2.37と比較して表面波1が存在しないこと以外は特別な挙動は認められない。

#### 第4章 第3節 自由境界への入射平面SV波と表面波

前節の等色線縞模様による応答を検討する中で、スリット模型および段差のある模型の自由境界の縞模様の応答から、平面SV波が入射して表面波を発生する様々な状態を示してきた。特にその中で、head waveおよび表面波2の発生原因が幾何学的形状のみにあるのではなく、SV波の入射角のあり方に関係していると考えられることを述べた。

ここでは、これらの関係をより明確にする目的で、SV波の入射角が特別な意味を持つ円弧自由境界を有する模型に対する実験を行ない、SV波の入射場についての等色線縞模様写真から表面波を示す縞模様の応答を検討する。

なお、自由境界上に波源を持つRayleigh波の伝播と曲線自由境界との関係については、Viktorov<sup>4-5, 6)</sup>、その他<sup>4-7, 8)</sup>による理論的、実験的研究がある。しかし、本研究の平面入射波によって発生する表面波の挙動を対象にする場合とは異なる。

##### 1) 円弧自由境界へ入射するSV波による応答

模型R1011, R1012, R1013は、それぞれ角度の異なる二つの直線自由境界を、入射パルス長とほぼ同じオーダーの半径40mmの円弧で滑らかに接続している。それぞれをR端衝撃した場合、上記の模型に対するSV波の入射角 $\gamma$ は円弧部を通過することにより、

R1011:  $36.4^\circ \sim 45^\circ$ , R1012:  $36.4^\circ \sim 60^\circ$ , R1013:  $36.4^\circ \sim 90^\circ$ の間を滑らかに増加する。また、R1011以外の模型は円弧部を通過後の自由境界の長さを十分長くし、他の境界または隅角からの反射波が到達する時間を遅らせている。

##### (1) 写真-4.2.29について

写真-4.2.29は、模型R1011をR端衝撃した場合の等色線縞模様写真である。

この模型は、円弧部を通過後のSV波の入射角が $45^\circ$ となるように設定してある。前節4.2.6.2)で述べたように、入射角が $45^\circ$ を越えることによってhead waveおよび表面波2が発生するのであれば、ここでは表面波1のみが存在するはずである。

$90\mu\text{sec}$ の入射波面の自由境界上の位置が円弧の中央部である。予想したように $115\mu\text{sec}$ で三角形部分の頂点へ入射波が到達するまで、 $\gamma_0 \leq \gamma \leq 45^\circ$ の範囲で現われる入射SV波、反射SV波および表面波1の、典型的な縞模様の組合せが伝播している。ただし、入射角が $45^\circ$ のときに自由境界の応答比が0であることは、写真-4.2.18の場合ほど明瞭でない。

##### (2) 写真-4.2.30について

写真-4.2.30は、模型R1012をR端衝撃した場合の等色線縞模様写真である。

この模型は、円弧部を通過後のSV波の入射角が $60^\circ$ となるように設定してある。したがって、入射角が $45^\circ$ を越えた場合に発生するhead waveおよび表面波2の応答が確かめられる。なお、入射角が $60^\circ$ の場合、 $C_{TA}=1.15C_T$ である。



110  $\mu\text{sec}$  で入射SV波が円弧部の中央に達する。

130  $\mu\text{sec}$  で入射波全体の入射角が $60^\circ$  となる。120  $\mu\text{sec}$  以後、自由境界に沿って入射波面の前方のに head waveの縞模様が認められ、その波面が時間とともに入射SV波面の前方に先行する様子が確認できる。また、head waveの波面の位置から発生位置が円弧部の中央付近であることが分かる。

130  $\mu\text{sec}$  の駒で、入射波面と反射波面で形成される自由境界側に凸の縞模様の自由境界側に、表面波2が現れ始める。同時にそれまで最大応答比 0.8の縞模様であった表面波1の縞次数が応答比約 0.3に低下し、表面波2と暗線で区切られた形が残る。

一般に、二つの縞模様のグループが暗線で区切られることは、それぞれの縞模様を構成する主応力差の符号が異なることを意味する。したがって、この場合先行する表面波2と後続の表面波1とによる自由境界の垂直応力の符号が逆であること、またそれぞれの表面波による粒子の回転方向が逆であることを意味する。

### (3) 写真-4.2.31について

模型R1013は、円弧部通過後の自由境界に対するSV波の入射角が、L端衝撃の場合は $\gamma=53.6^\circ$ 、R端衝撃の場合は $\gamma=90^\circ$  となるように設定してある。したがって、L端衝撃に対して写真-4.2.13に示した入射側のスリット側面（左側面）の応答を、R端衝撃に対して写真-4.2.12に示したスリット右側面の応答をほぼ示すであろう。ただし、ここで用いた模型の円弧の半径は模型R1004のその 8倍である。

写真-4.2.31は模型R1013をL端衝撃した場合の等色線縞模様写真である。

145  $\mu\text{sec}$  でSV波の入射角が $45^\circ$  を越える。このときすでに波面後方の円弧部に応答比0.78の表面波1が現われている。その後この表面波の応答比は低下し、175  $\mu\text{sec}$  以後は0.45でほぼ一定値を保つ。

145  $\mu\text{sec}$  以後の駒には head wave は視認できないが、165  $\mu\text{sec}$  から入射波面の延長線を中心として広がる縞模様の表面波2が自由境界に沿って現われる。その応答比は表面波1のそれよりさらに低く0.33程度である。しかし、やはり表面波1とは暗線で区切られ互いに逆位相であることを示している。上記の挙動は写真-4.2.13の場合の挙動とほぼ同じであるが、その場合の方が表面波2に対する表面波1の応答比の割合（表面波1の縞次数/表面波2の縞次数）は2倍以上大きい。

写真-4.2.11の入射側のスリット側面にも同様の挙動が現われているが、この場合はさらにこの応答比の割合が高い。結局、表面波2の縞次数はどの写真の場合も 0.5以下であるのに対し、表面波1の最大の縞次数は入射角が等しければ円弧の半径が小さくなるほど高くなると推定される。

写真-4.2.11, 4.2.17, 4.2.31の場合は、いずれも低い応答比の表面波2は発生するが head waveの波面は確認できない。

### (4) 写真-4.2.32について

写真-4.2.32は、模型R1013をR端衝撃した場合の等色線縞模様写真である。すで

に述べたように、このとき円弧を越えた自由境界へのSV波の入射角は $90^\circ$ である。

120  $\mu\text{sec}$  で head wave が現れる。130  $\mu\text{sec}$  以後で表面波2が明瞭に現れ、時間とともにその応答比は増加し、145  $\mu\text{sec}$  以後は応答比 0.8でほぼ一定となる。一方、表面波1は 130  $\mu\text{sec}$  以後で応答比が低下し、約0.33の一定値となる。これらは写真-4.2.12のスリットの右側面の挙動と同様であるが、その場合の方が表面波2の応答比は高く、約0.9である。したがって、入射角が等しければ円弧の半径が小さいほど表面波2の応答比が高くなると推定される。

## 2) 半径が大きい円弧自由境界へ入射するSV波による応答

模型R1015は、円弧の半径が 150mmであり入射SVパルス長に対する比は 3/1である。円弧の半径が大きくなると平面入射波の伝播に伴う入射角の変化はそれだけ緩やかになる。この場合に対する表面波の応答をここまで述べてきた応答と比較する。

写真-4.2.34は、模型R1015をR端衝撃した場合の等色線縞模様写真である。

この場合SV波の入射角は、O点の鉛直下方で $31^\circ$ 、円弧の端で $81.4^\circ$ である。

135  $\mu\text{sec}$  で入射角が臨界角を越え、145  $\mu\text{sec}$  で $45^\circ$ を越える。140  $\mu\text{sec}$  から明瞭に現われた表面波1が 145  $\mu\text{sec}$  ~ 155  $\mu\text{sec}$  の駒では応答比が約 0.6でほぼ一定であり、160  $\mu\text{sec}$  以後減少する。

180  $\mu\text{sec}$  以後の駒に表面波2と head wave が明瞭となり、表面波2の応答比は 210  $\mu\text{sec}$  で最大となる。

以上の、SV波の入射角とそれに伴って現われる反射SV波、表面波1、head wave、表面波2などの挙動は、伝播距離に対する入射角の変化率が少ないために応答が急変しない点を考慮すると、すでに述べた半径の小さい円弧境界での挙動と全く同様である。したがって、入射パルス長に対してこの程度の円弧の半径までは、SV波の入射角との関係において波動挙動が同じメカニズムで生じていると考えることができよう。

180  $\mu\text{sec}$  および 190  $\mu\text{sec}$  の駒から head wave の発生点を求めると、円弧上の入射角が $45^\circ$ となる点が求められる。この場合には入射角の変化が比較的緩慢であるためその点を特定し易い。すでに示した、写真-4.2.24によって同様に head wave の発生点を調べるとやはり入射角がほぼ $45^\circ$ となる点が求まる。

2. 1. 4. 4) で述べたように、SV波が臨界角を越えて自由境界へ入射するとき、入射角が $45^\circ$ 以上と以下とで表面波による粒子運動の方向が逆であり、そのため、たとえば  $r_0 \leq r \leq 45^\circ$  で表面波1が発生している状態で入射角が $45^\circ$ を越えると、逆回転の表面波2が発生することで入射角が $45^\circ$ の点が波動の発生源となると推定される。また、表面波1は入射角が負でない限り入射波によって発生する表面波2と重ね合わされ、応答比が低下することになる。

本章は、第3章で示した基準模型以外の17種類の均質地盤模型および9種類の非均質地盤模型について、動光弾性実験によって得た38例の等色線縞模様写真をもとに、それぞれ特徴のある注目領域の波動伝播挙動を考察し、各模型の波動応答の特性を解明するとともに波動応答が動光弾性実験によって追求できる状態を示した。その結果、本実験の範囲で以下のような結論が得られた。

##### 1) 平面波動論との関係

序論においても述べたように、本研究の目的は地震波などによる地盤内の波動挙動を解明するために、平面波が自由境界または非均質境界へ入射する場合の地盤模型の応答を追求することである。特に、平面SV波が自由境界へ入射する場合には、入射角によって表面波が発生することが理論付られている。

従来は、たとえばRayleigh波としての表面波の挙動に関する実験においては、ほとんどの場合、自由境界を波源としてRayleigh波を発生する入力法が採用され、平面波が自由境界などへ入射した結果として発生する表面波を含む諸応答を解明するという手順ではなかった。この違いが本研究の観点の特徴であることを踏まえて、波動論におけるP波およびSV波による応答との関係をまとめると以下のようである。

(1) ここで用いた平面波発生法を用いると、P波およびSV波がそれぞれ独立した平面波面を形成する。この波面の模型内への入射角を測定するか、または入射角が与えられた直線境界（自由境界または非均質境界）での反射角および透過角を測定することによって、波動論から非接触な方法で入射した波動に対する材料の動的特性を求めることができる。

(2) 直線自由境界へ平面波が入射する場合の応答は、等色線縞模様の縞次数による応答比を用いると、入射P波およびSV波の全入射角に対して、一定次以上の縞次数を持つ縞模様については縞次数読み取り誤差内で理論応答が表わされる。

(3) SV波が自由境界へ臨界角を越えて入射する場合の応答について、入射角が $\gamma_0 \leq \gamma \leq 45^\circ$ で発生する表面波1と、 $45^\circ \leq \gamma$ で現われる表面波2を、等色線縞模様によって実験的に確認することができる。

##### 2) 隅角および円弧境界と表面波応答の関係

幾何学的に厳密な隅角を模型に設定することは困難であるが、入射パルス長に対する曲率半径の比を1/100以下にすることは可能である。普通、スリット底は開角の極めて小さい隅角または近接した直角隅角と考えられている。このようなスリット底に平面波動が入射するとき、その隅角から円筒波、head wave、Rayleigh波が発生するとされている。

これらの波動が発生するメカニズムおよび隅角と円弧境界の平面波動に対する応答を、動光弾性実験によって解明することを試みた結果、SV波の入射場に関して以下の結論が

得られた。

(1) 近接した隅角を持つ幅の狭いスリット底と、円弧で形成されたスリット底へ平面 S V 波が入射する場合を比較した結果、入射側と非入射側のスリット側面に円筒波、head wave および Rayleigh 波が発生するためには、隅角または曲率半径の極めて小さい部分は必ずしも必要でないことが明かとなった。また、このような場合に発生する Rayleigh 波の典型的な縞模様が得られた。

(2) これらの波動が発生するためには、入射角が臨界角を越えさらに  $45^\circ$  を越えるような状態であってもよく、このような状態は一定範囲の曲率半径を持つ曲線自由境界によっても形成される。このとき、入射角が  $\gamma$ 。  $\leq \gamma \leq 45^\circ$  のとき発生する表面波 1 と、  $45^\circ \leq \gamma$  で発生する表面波 2 が対となって自由境界に沿って伝播する。また、  $\gamma$ 。  $\leq \gamma \leq 45^\circ$  の条件下では表面波 1 のみが発生伝播することが確認された。

上記の意味で、隅角は曲率半径が極めて小さい曲線部とみなすことができる。したがって、表面波を発生するメカニズムの上からは、平面波の曲線境界への入射角が曲線境界上の入射点における接線によって、直線境界の場合と同様に定義できる。

(3) 入射角が  $\gamma$ 。  $\leq \gamma \leq 45^\circ$  と  $45^\circ \leq \gamma$  となる部分が連続して存在する円弧境界のような境界形状のもとでは、最初の範囲の入射角によって表面波 1 が発生し、その表面波 1 が存在したまま第 2 の範囲の入射角によって、表面波 1 と粒子の回転方向が逆の表面波 2 が発生する。この位相が逆の二つの表面波が干渉することによって、入射角が  $45^\circ$  を越える自由境界上の点から円筒波が発生する。このうち円筒 P 波によって head wave が形成される。また、表面波 1 の応答は入射角が  $45^\circ \leq \gamma \leq 90^\circ$  を保つ（負にならない）限り、逆位相の表面波 2 と重ね合わされることによって低下する。

(4) 曲率半径の大きさと応答の大きさを定量的に把握することは今後の課題である。

### 3) 非均質模型の波動挙動について

(1) 本実験に用いた低弾性係数材料 E p - II, E p - III は、基本材料 E p - I に対する特性抵抗比が約 0.5 として使用されたが、平行多層模型の層材料に用いる場合には粘性減衰が大きく、十分な層厚を必要とする模型に使用するときやや無理がある。

(2) また、スリットをこれらの材料で充填し、たとえば断層模型として使用する場合は、ここで使用したスリット幅と特性抵抗比程度では光弾性縞模様の挙動に十分な変化を生じない。

(3) 三種類の材料のどの組合せに対しても、層境界に Stoneley wave は発生しない。

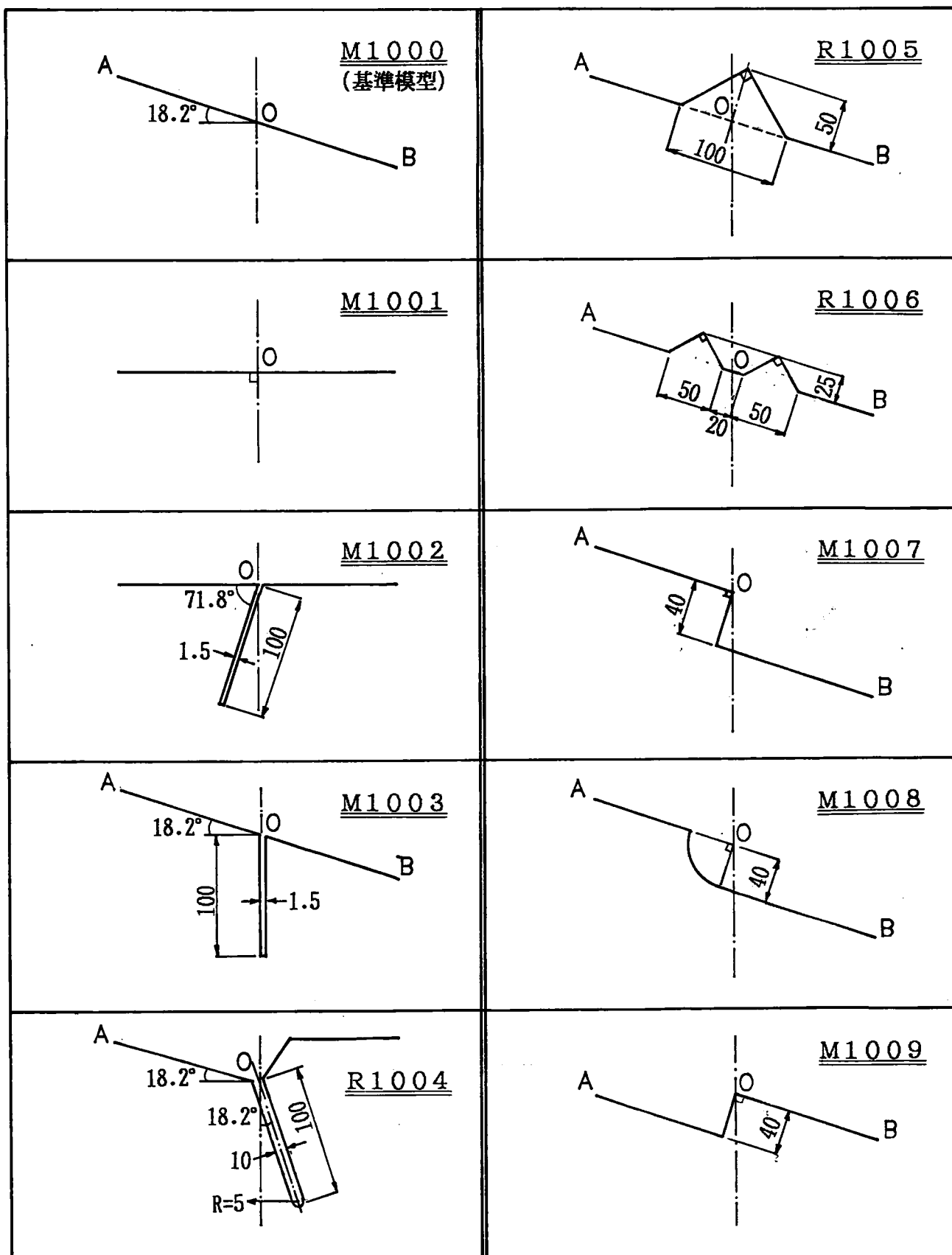


図-4.1.1 (a) 均質模型の模型番号とO点付近の形状 (単位 mm)

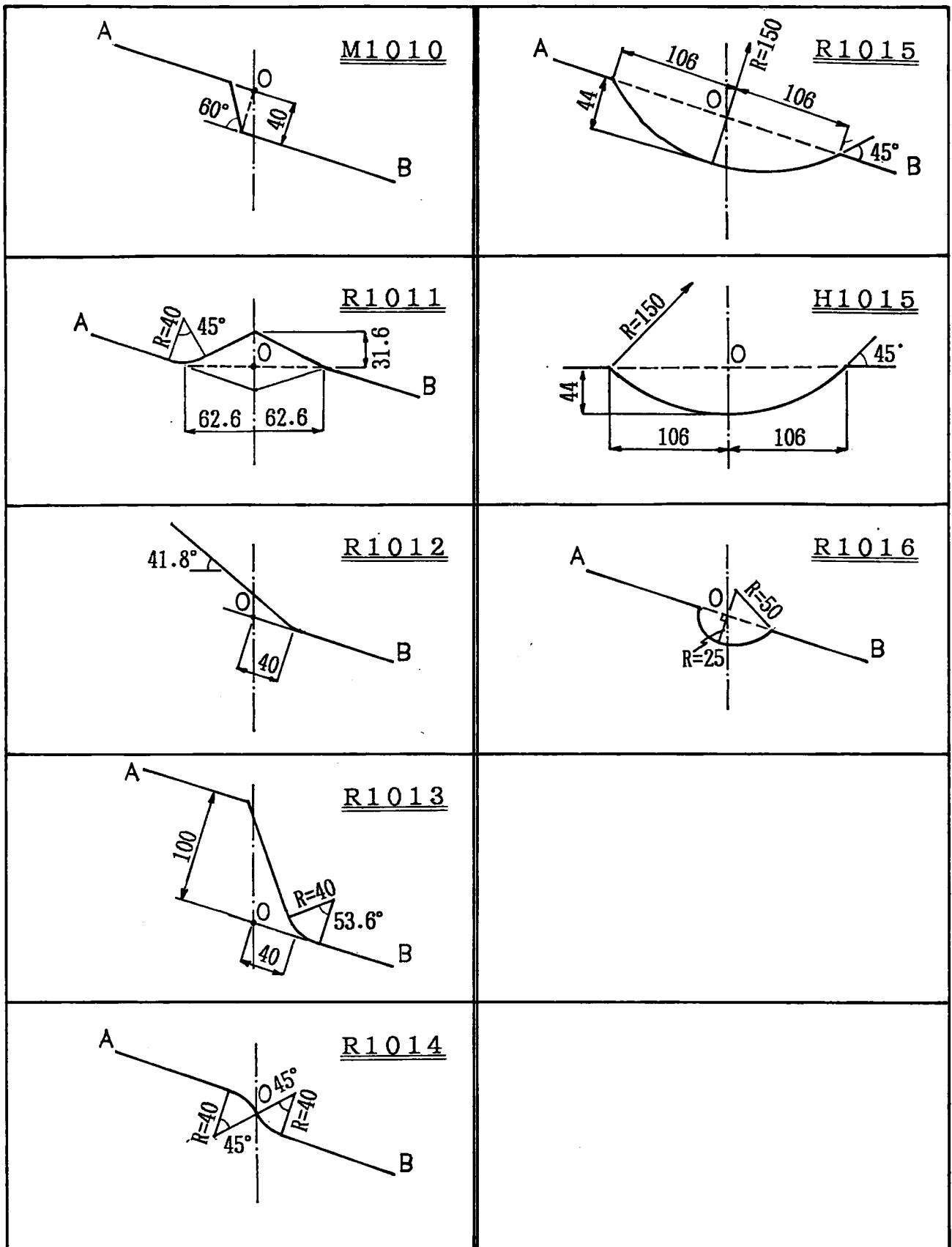


図-4.1.1 (b) 均質模型の模型番号とO点付近の形状 (単位 mm)

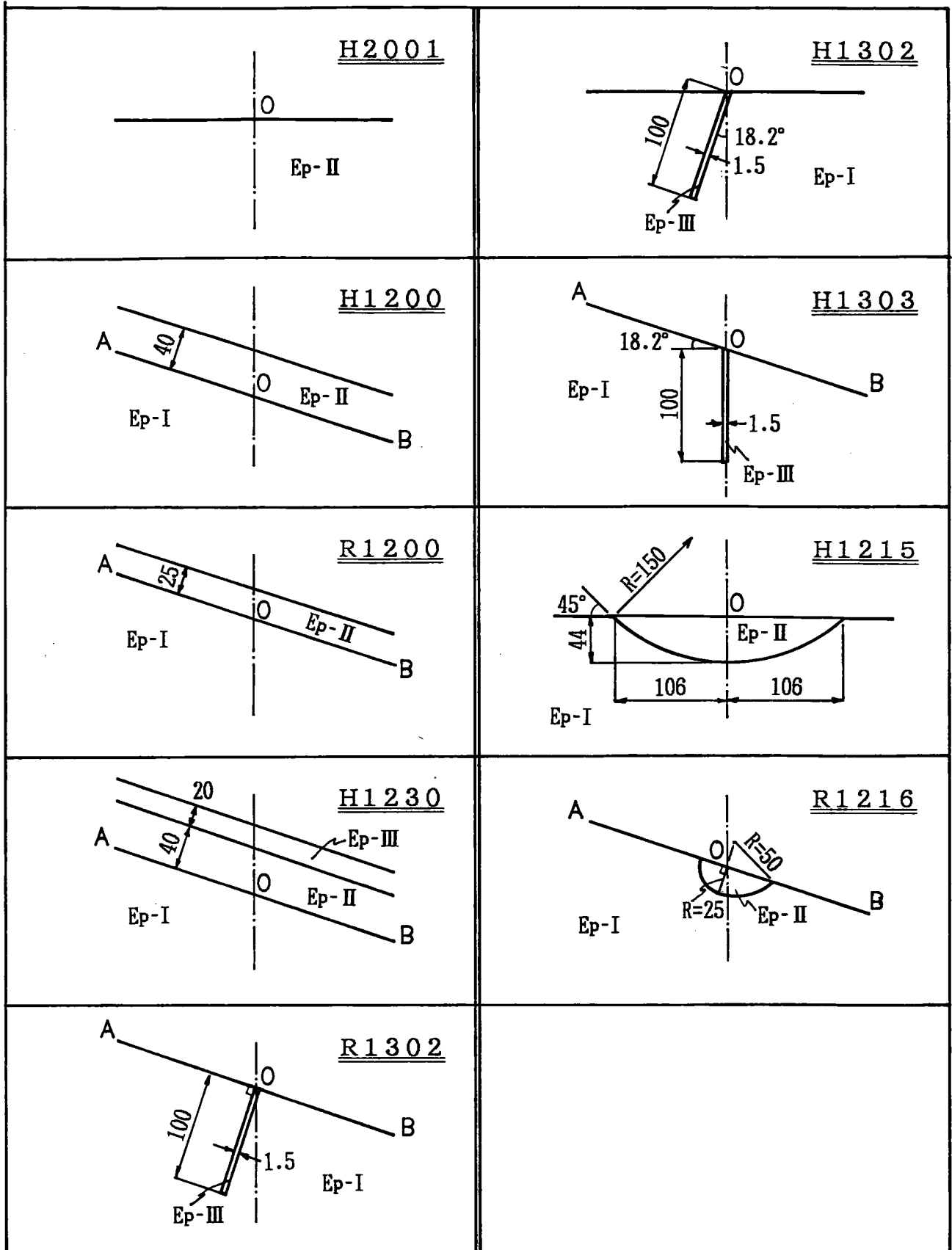
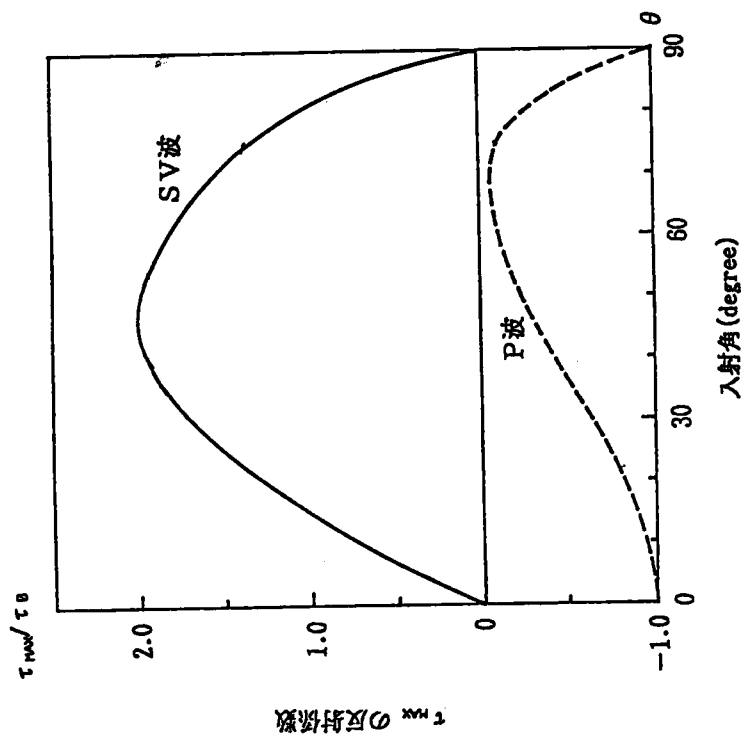
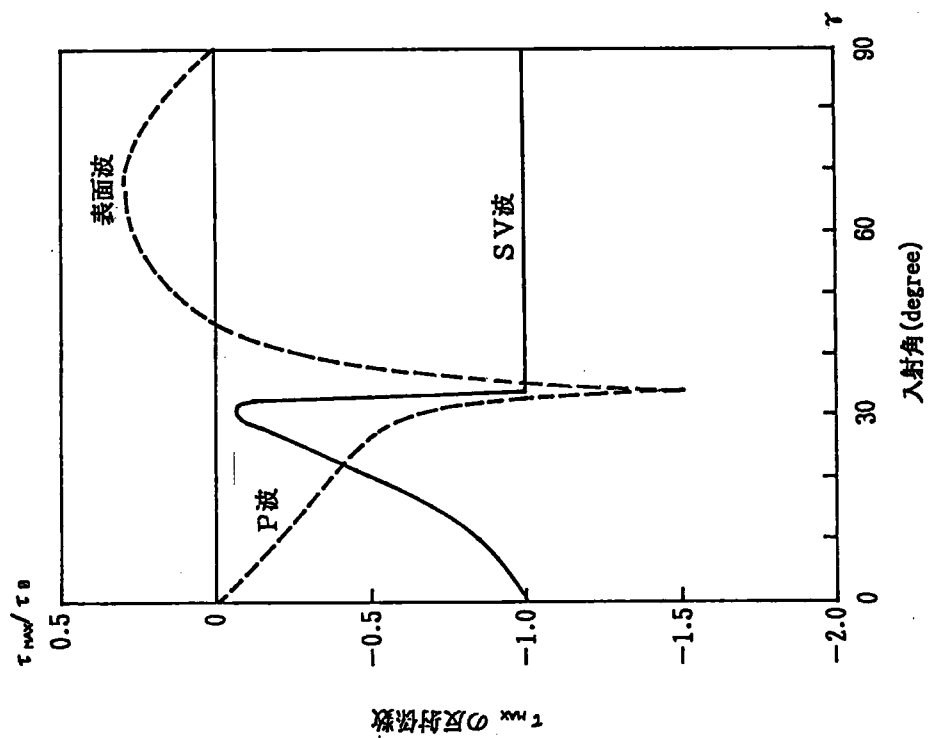


図-4.1.2 非均質模型の模型番号とO点付近の形状 (単位 mm)



(a) 入射P波による  $\tau_{\max}$  の反射係数 (b) 入射SV波による  $\tau_{\max}$  の反射係数

図-4.2.1 E p - I の自由境界にP波およびSV波が入射する場合の  $\tau_{\max}$  の反射係数



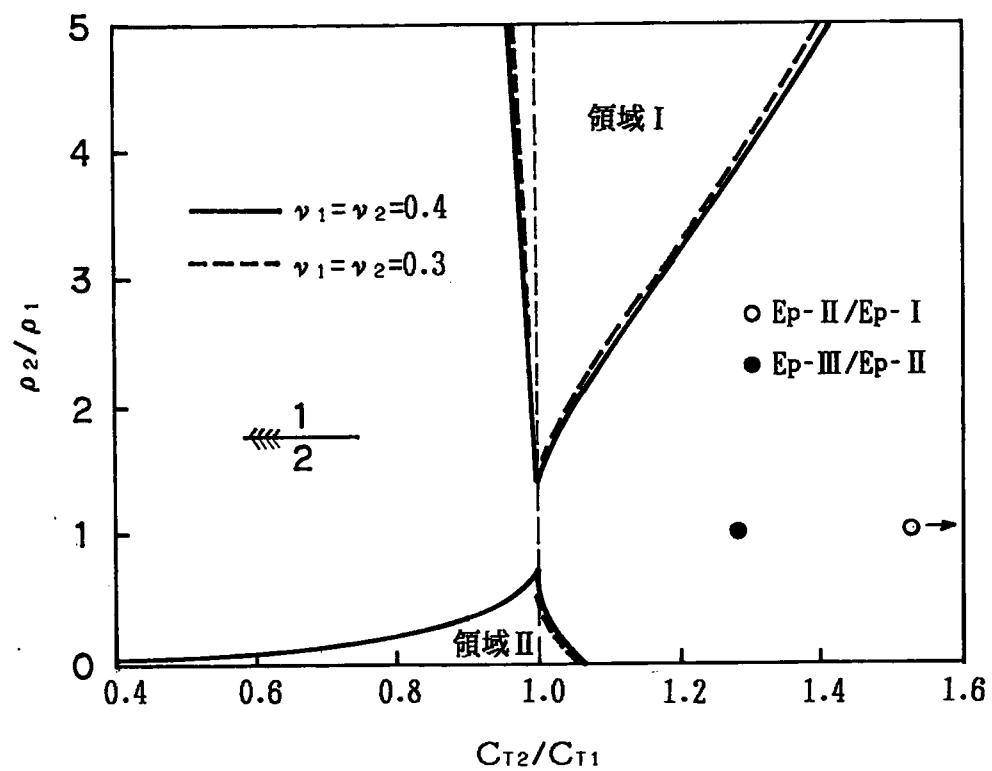
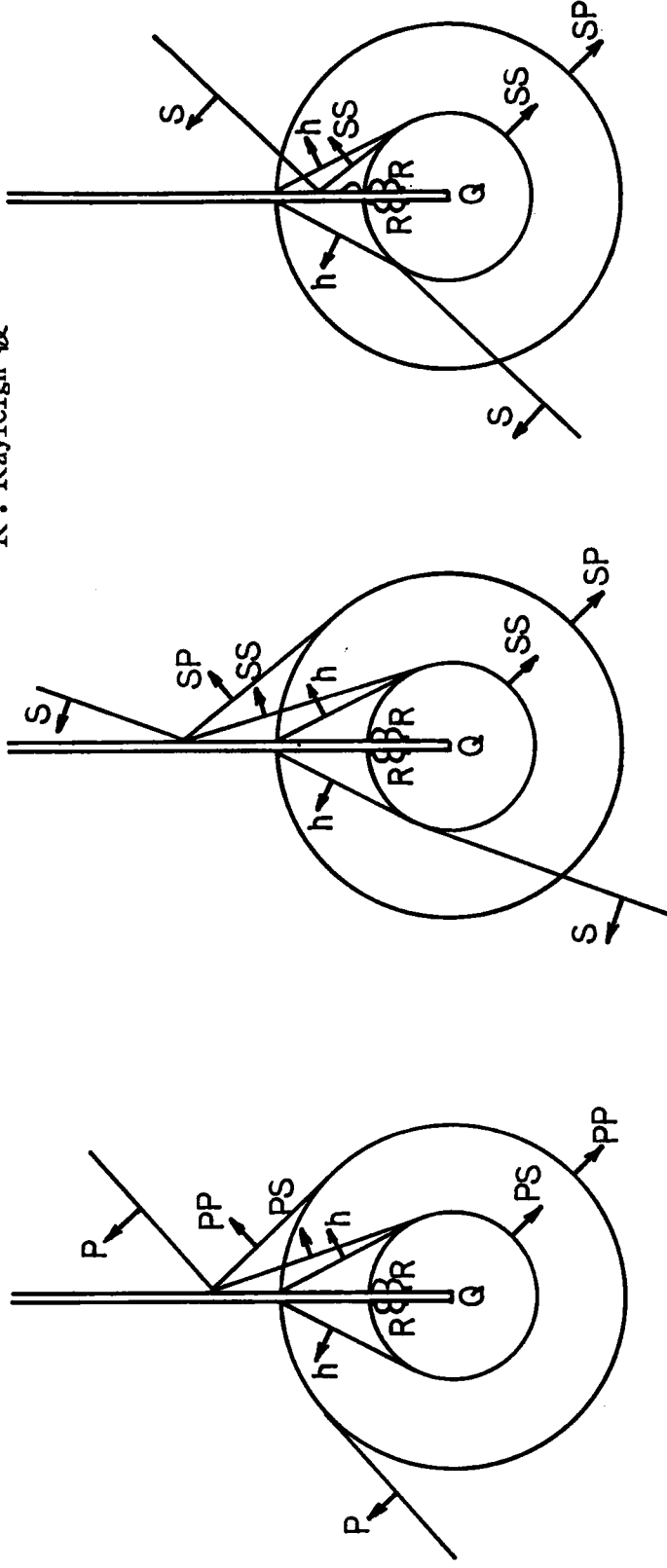


図-4.2.2 Stoneley wave の存在領域

h : head wave  
R : Rayleigh 波



(a) P波が入射した場合      (b) SV波が臨界角以下で入射した場合      (c) SV波が臨界角を越えて入射した場合

図-4.2.3 半無限スリットへ平面波が入射した場合のスリット底付近の波面

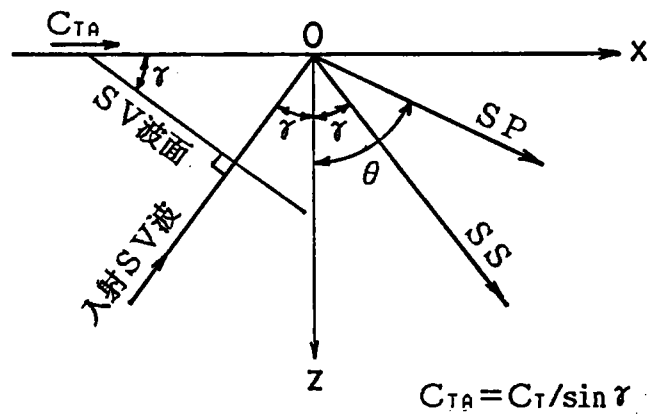
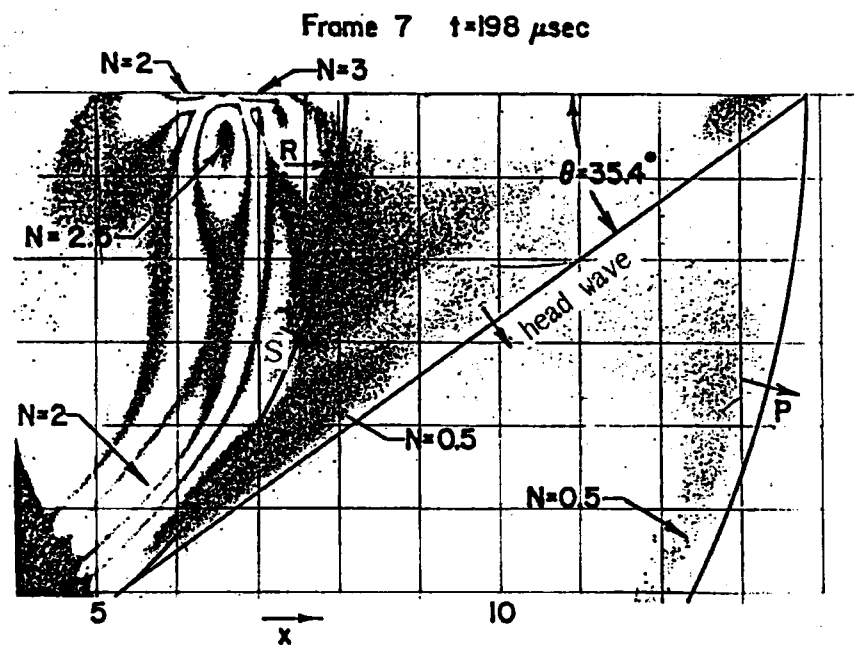
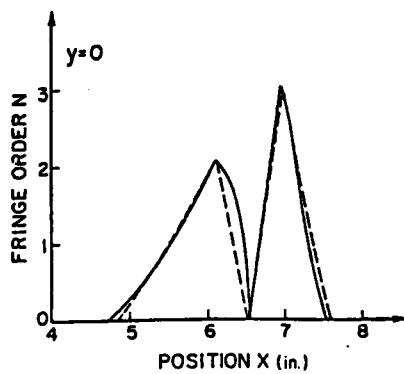


図-4.2.4 入射SV波面と見かけの速度 ( $C_{TA}$ )

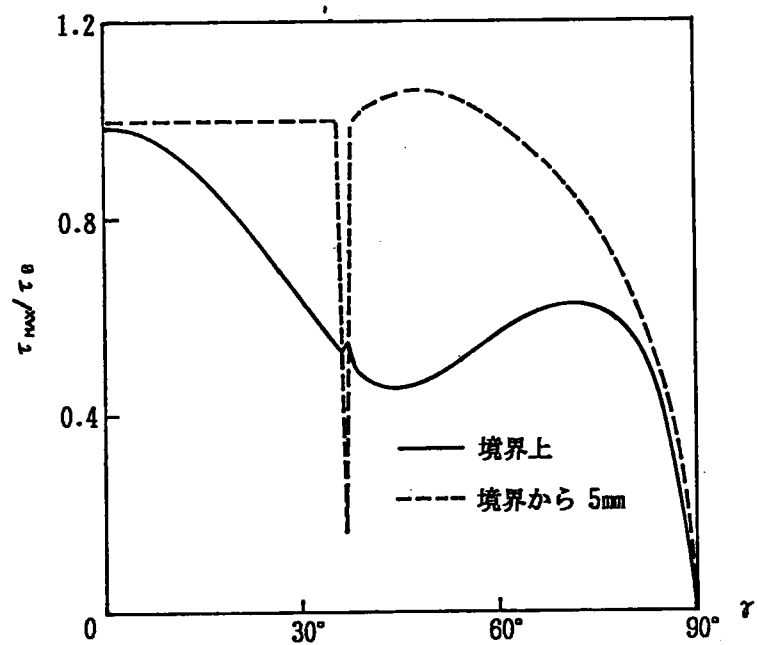
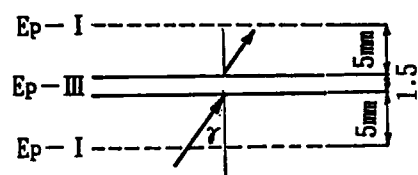


(a) Rayleigh 波などの等色線縞模様

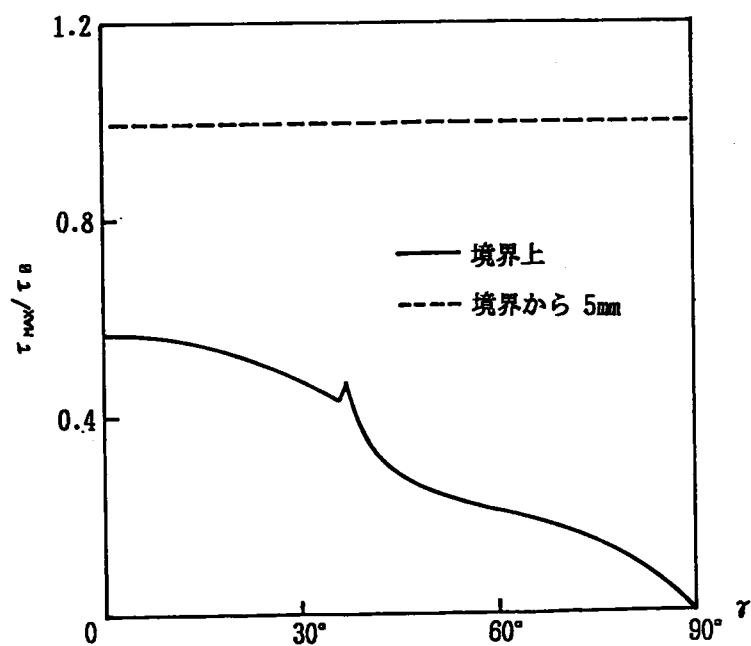


(b) 自由境界上のRayleigh 波の  
縞次数分布

図-4.2.5 爆薬で発生したRayleigh 波の等色線縞模様と縞次数分布<sup>4-3)</sup>



(a) 透過側境界付近の  $\tau_{\max}$  の応答比



(b) 入射側境界付近の  $\tau_{\max}$  の応答比

図-4.2.6 三層問題の境界付近の  $\tau_{\max}$  の応答比

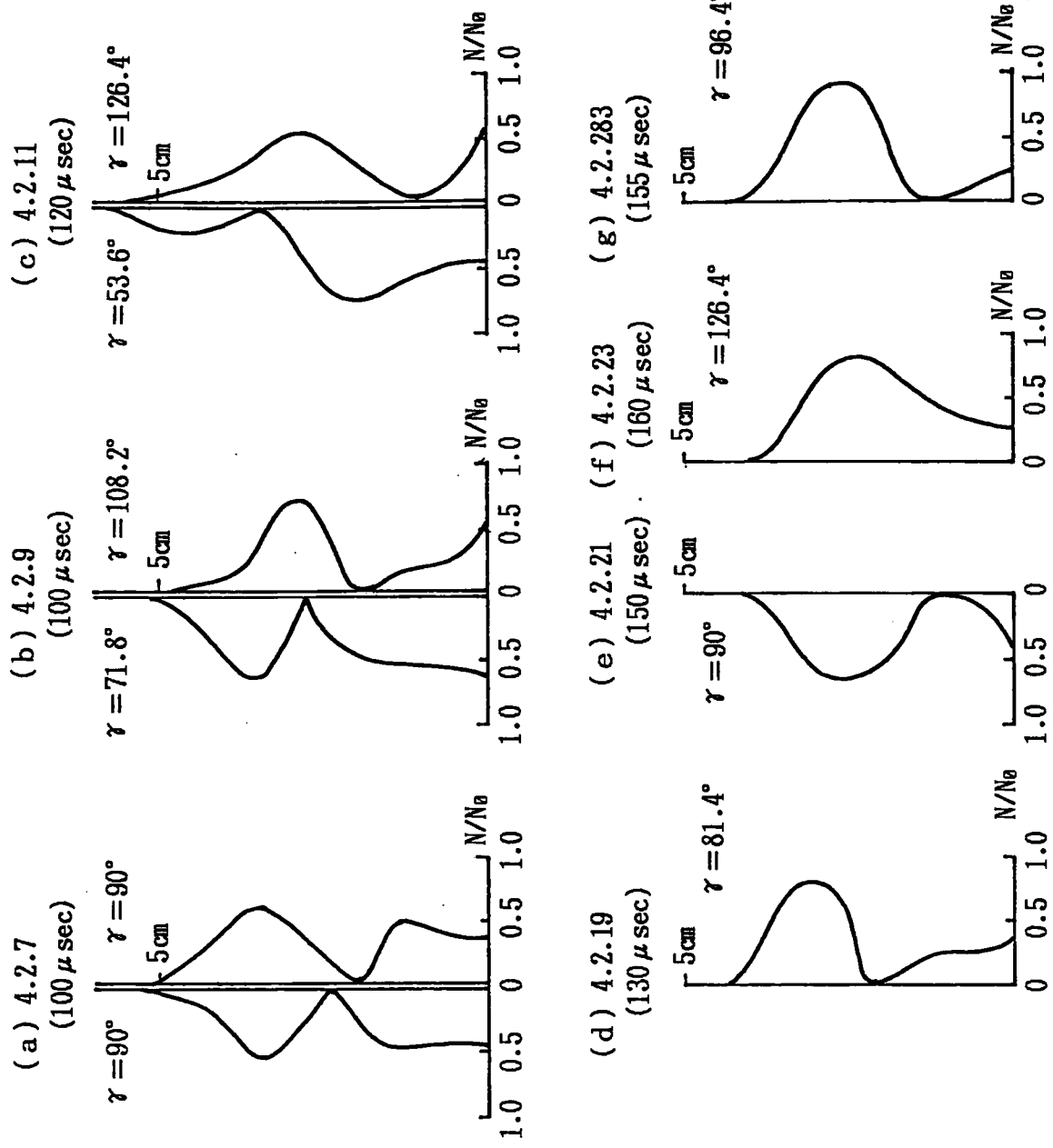


図-4.2.7 自由境界の縮次数分布 (SV波が隅角へ入射後 30  $\mu$  sec)

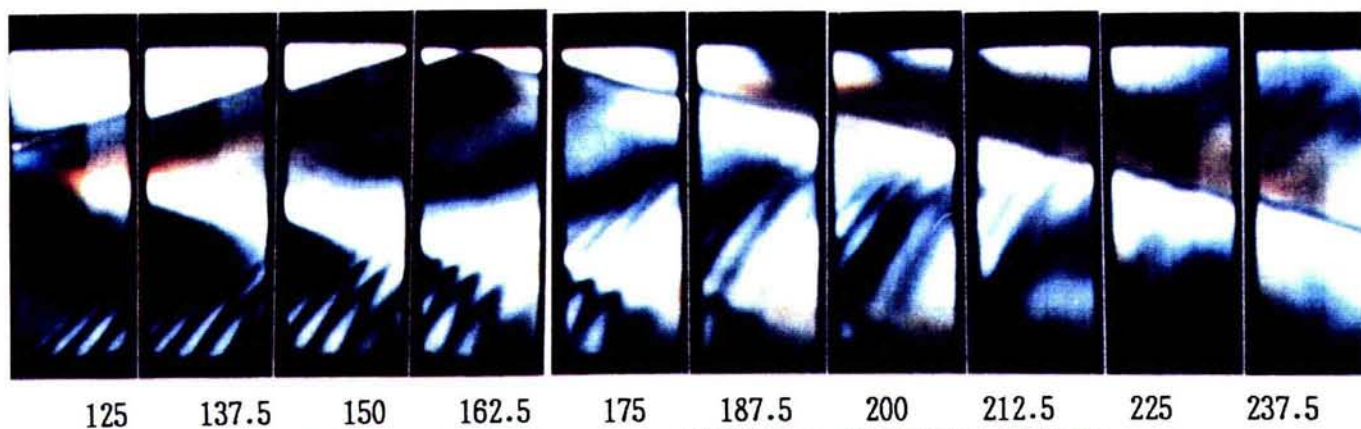
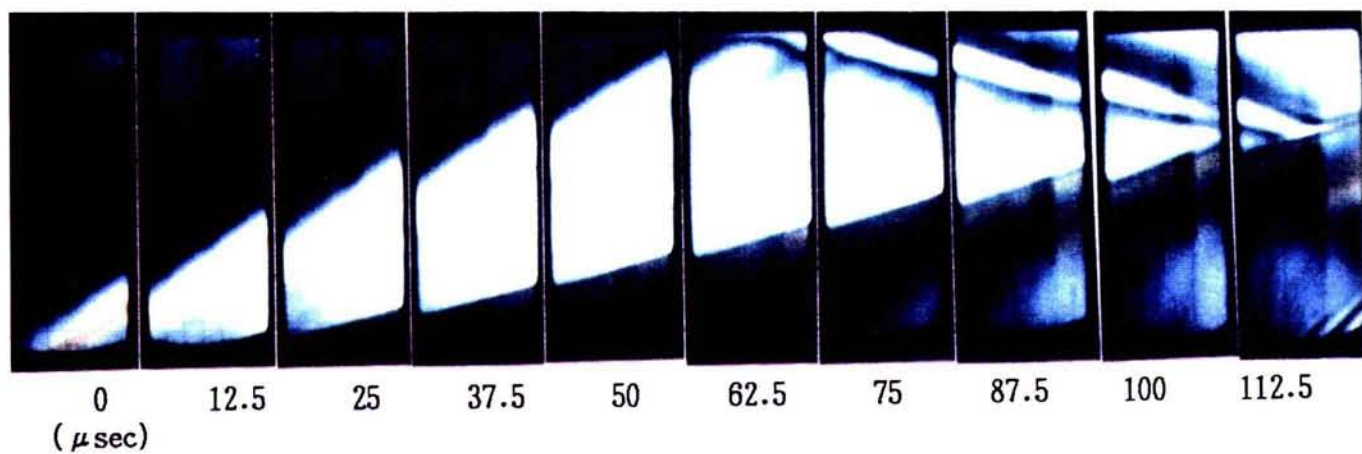


写真-4.2.1 模型M1001のL端衝撃による等色線縞模様写真<sup>H</sup>

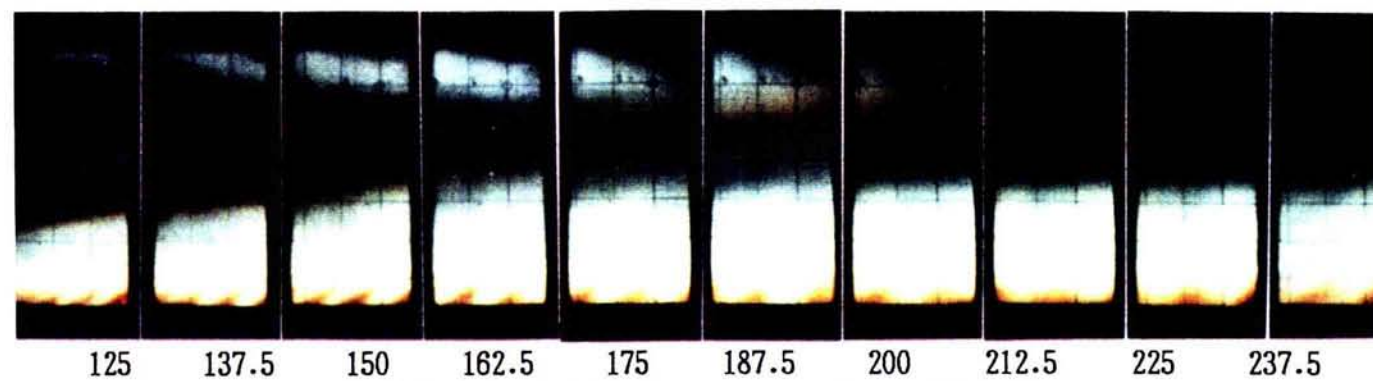
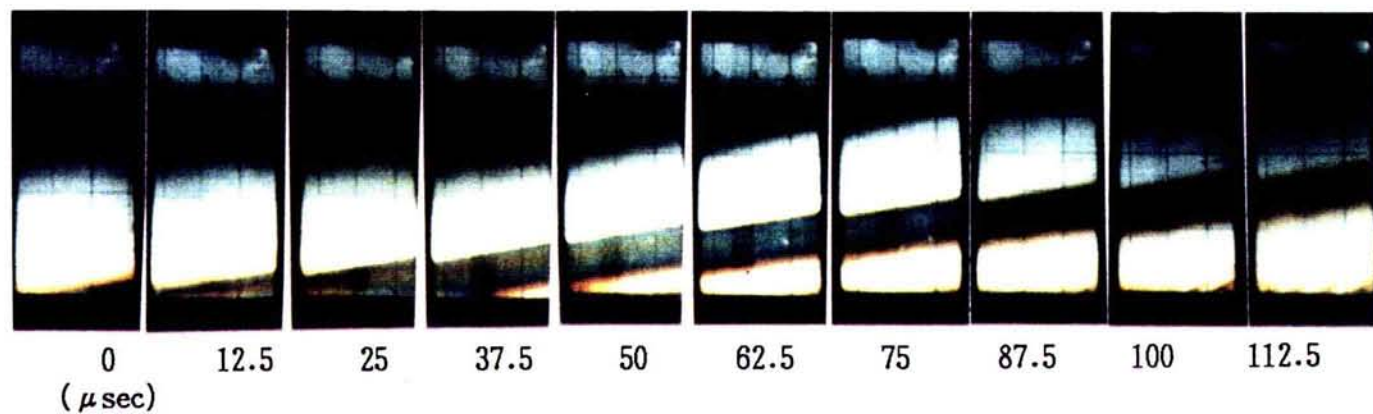


写真-4.2.2 模型H2001のL端衝撃による等色線縞模様写真<sup>H</sup>



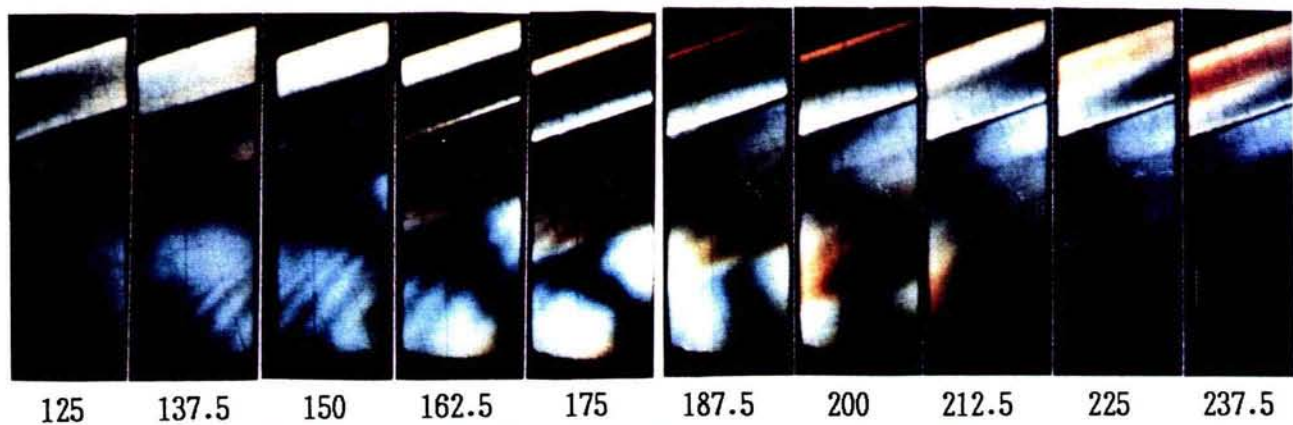
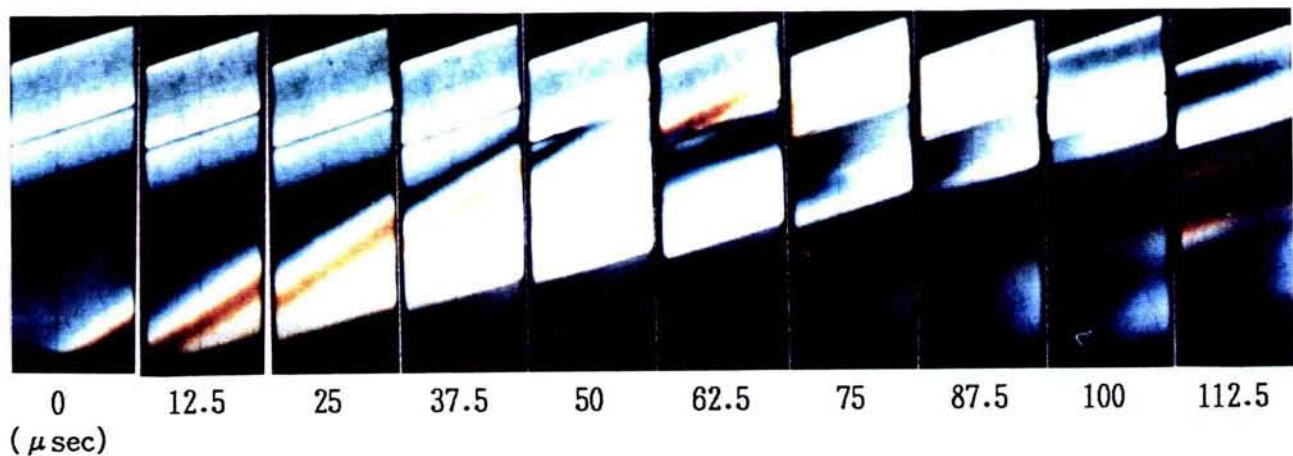


写真-4.2.3 模型H1200のL端衝撃による等色線縞模様写真<sup>H</sup>

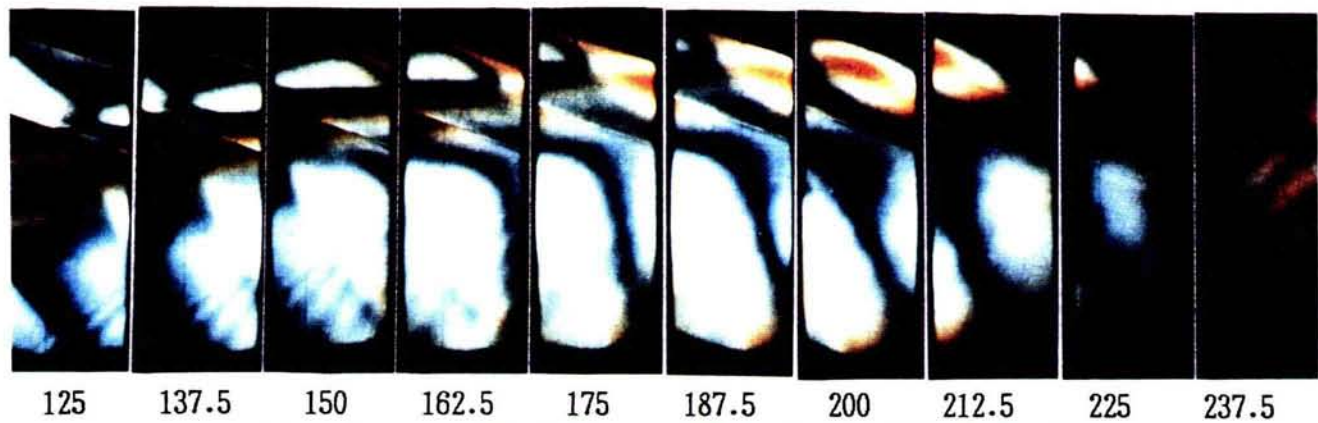
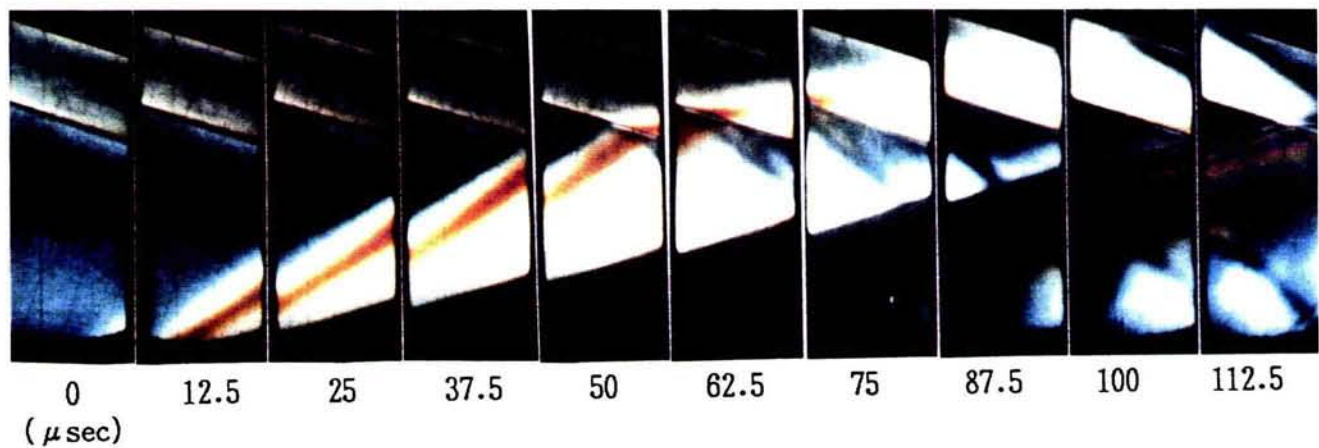


写真-4.2.4 模型H1200のR端衝撃による等色線縞模様写真<sup>H</sup>

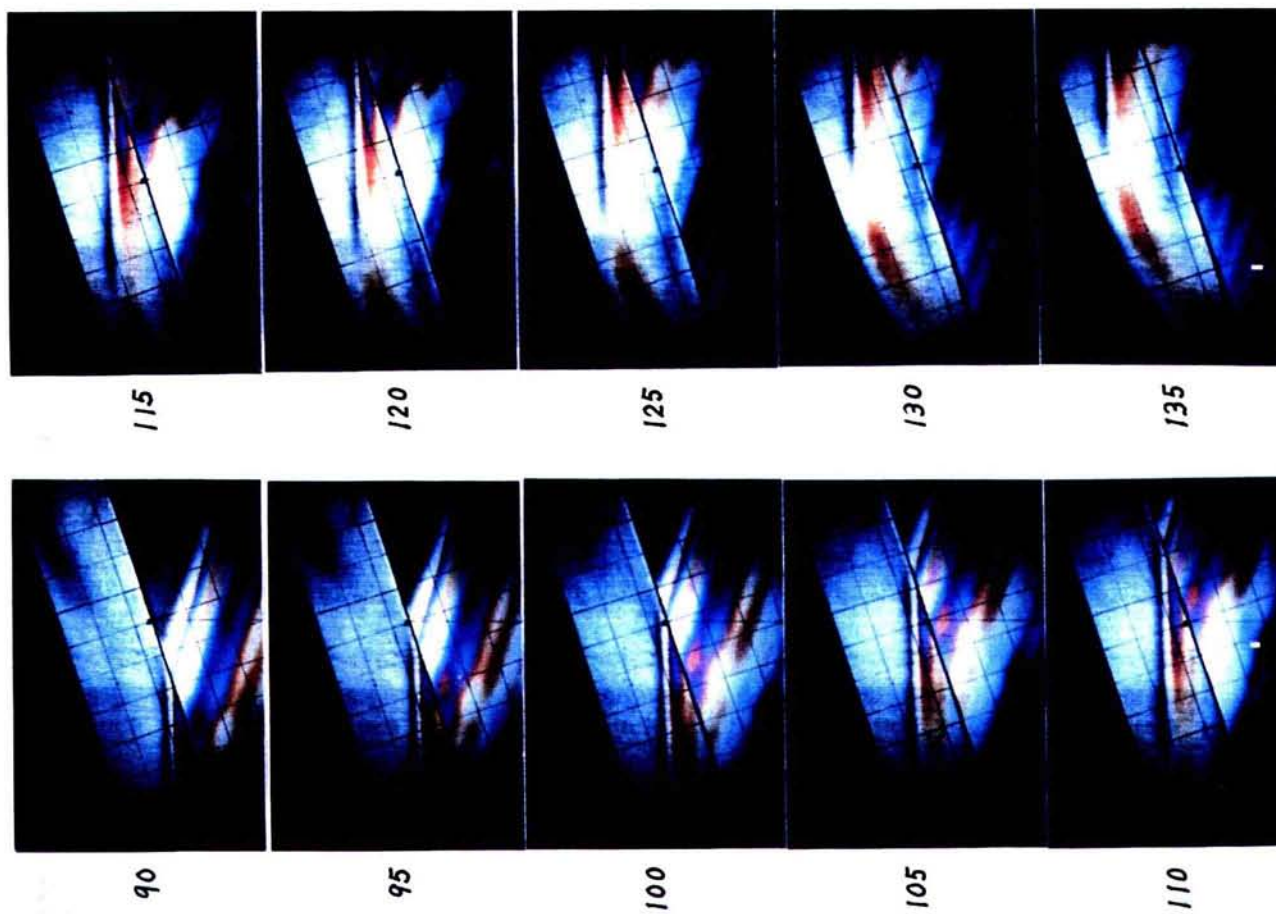
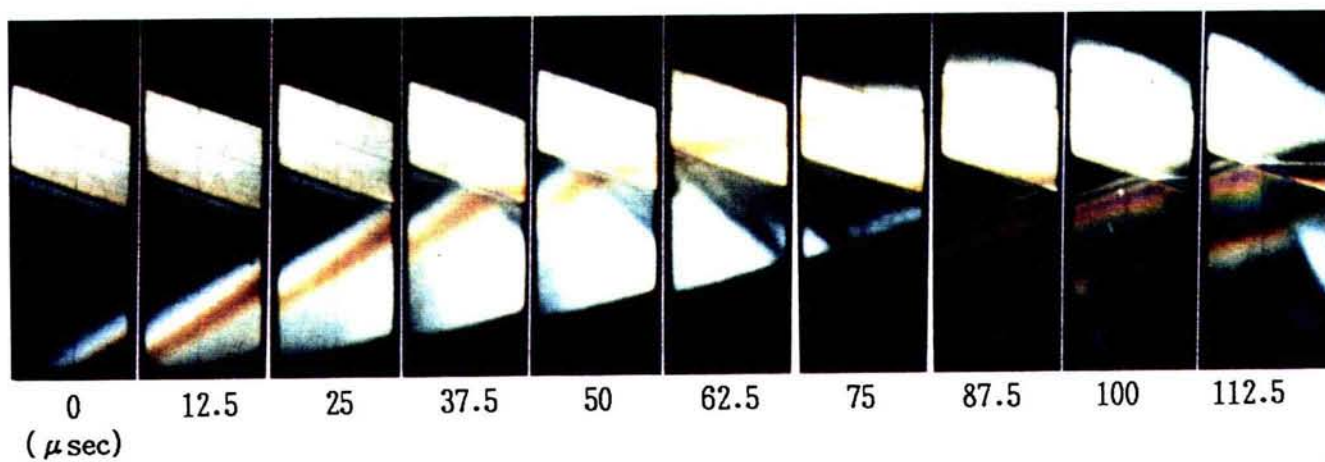


写真-4.2.5 模型R1200のR端衝撃による等色線縞模様写真<sup>R</sup>



( $\mu\text{sec}$ )

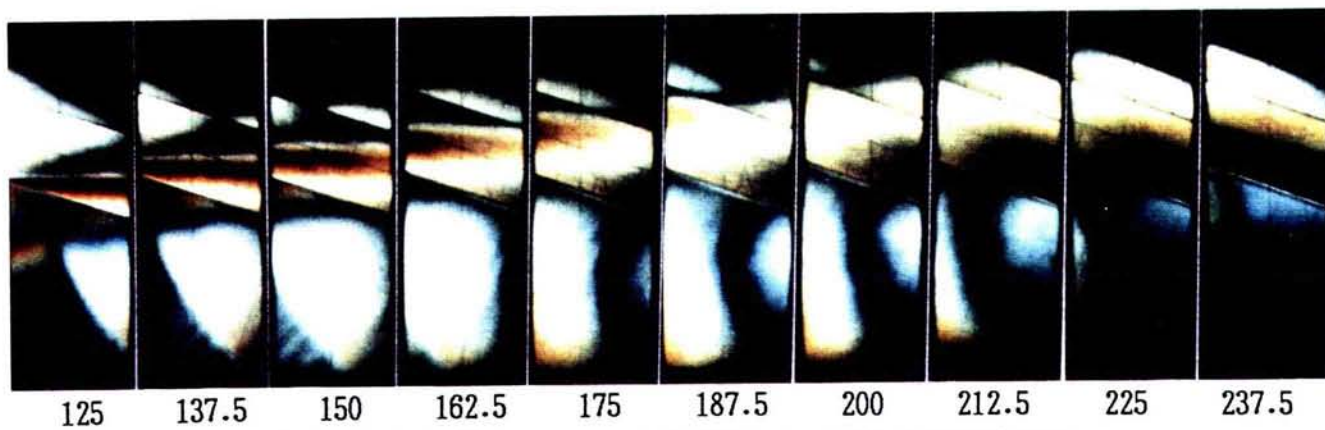


写真-4.2.6 模型H1230のR端衝撃による等色線縞模様写真<sup>H</sup>



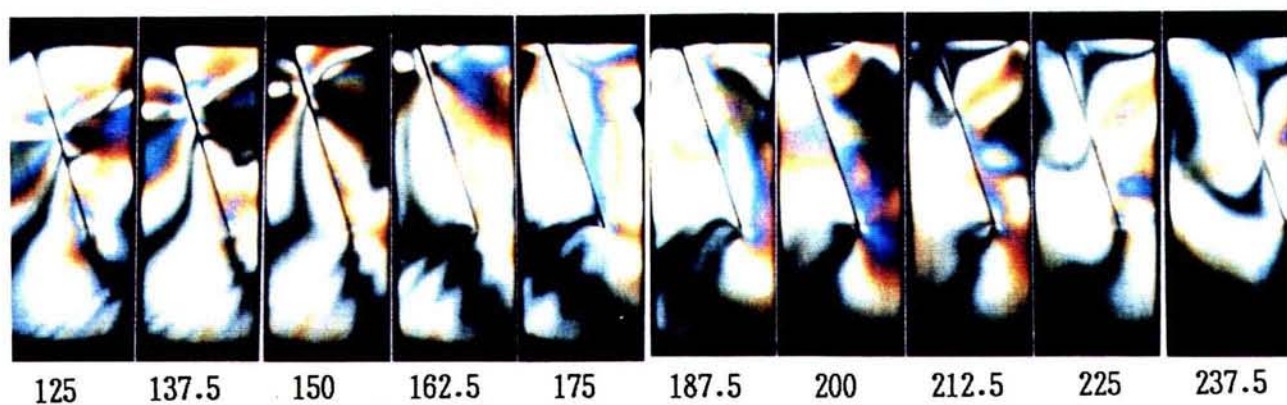
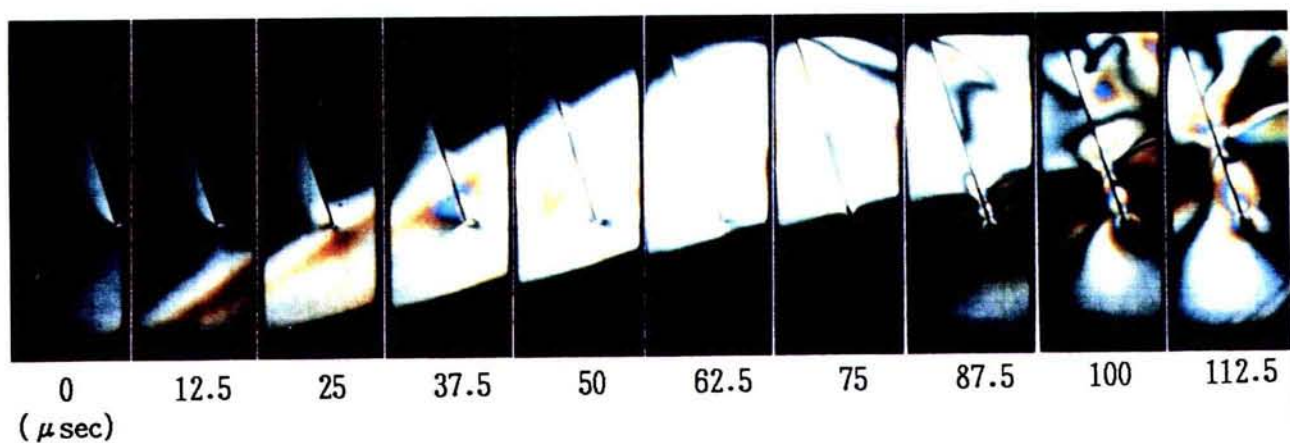


写真-4.2.7 模型M1002のL端衝撃による等色線縞模様写真<sup>H</sup>

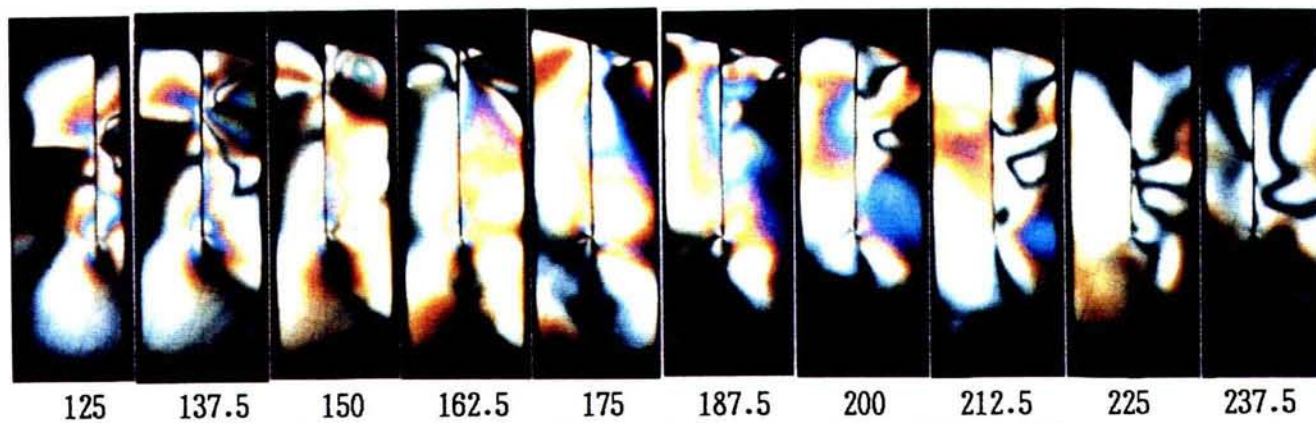
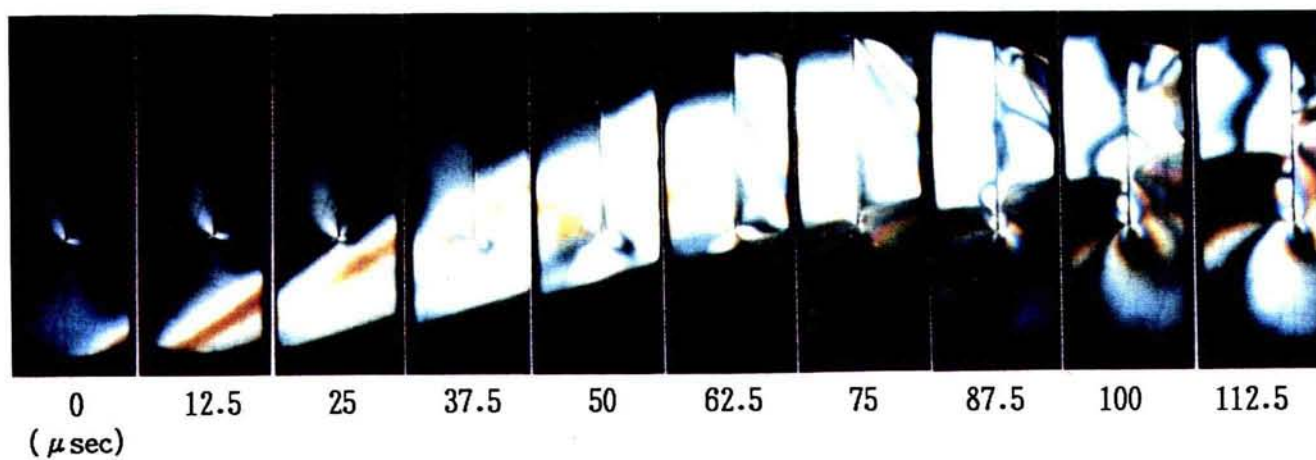
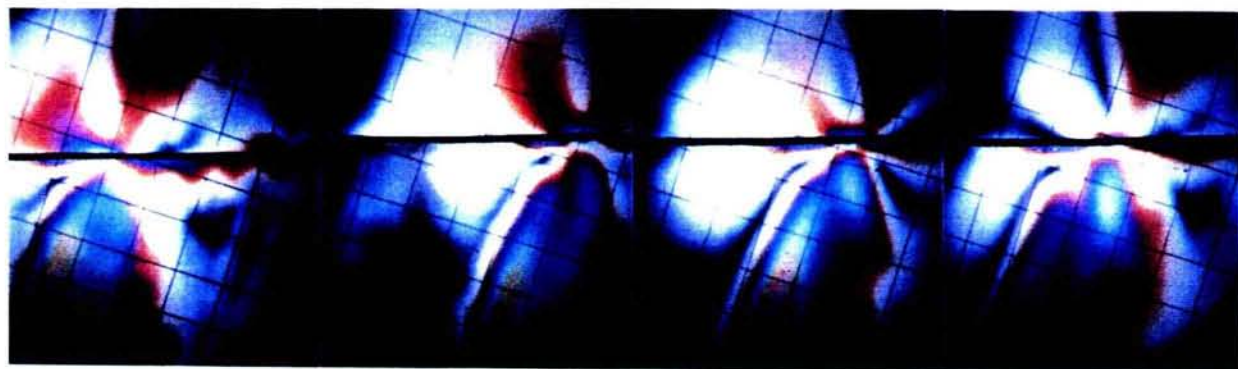


写真-4.2.8 模型M1003のR端衝撃による等色線縞模様写真<sup>H</sup>



1.1.0

1.2.0

1.3.0

1.4.0

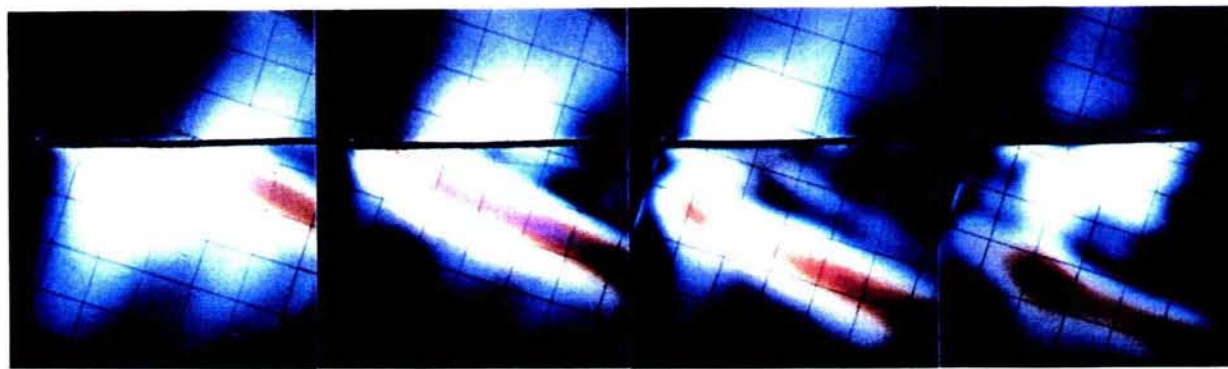


1.5.0

1.6.0

1.7.0

1.8.0

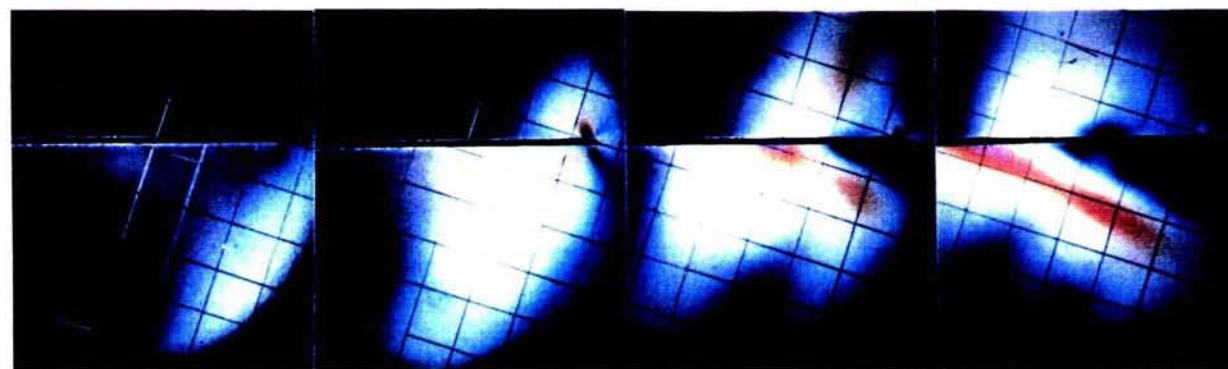


1.9.0

2.0.0

2.1.0

2.2.0



2.3.0

2.4.0

2.5.0

2.6.0

写真-4.2.9 模型M1003のL端衝撃による等色線模様写真<sup>8</sup>



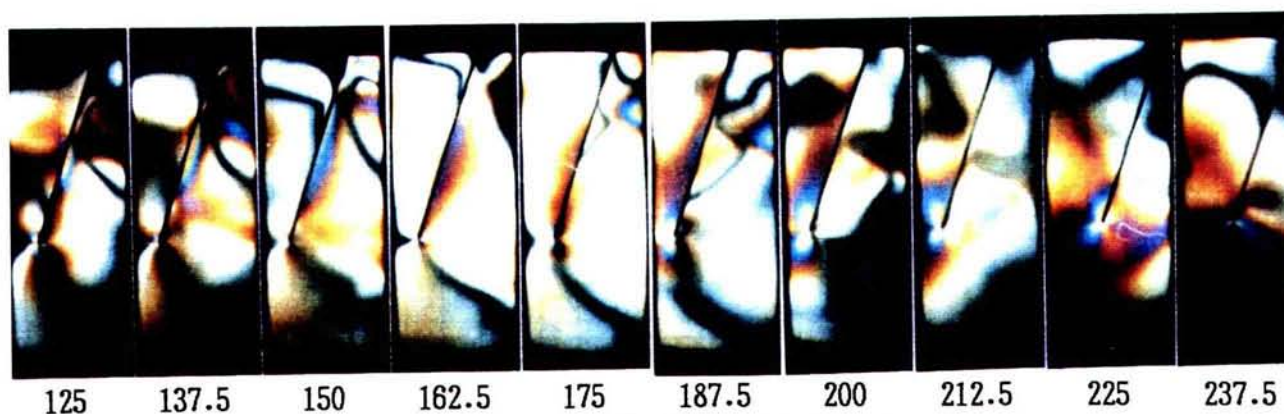
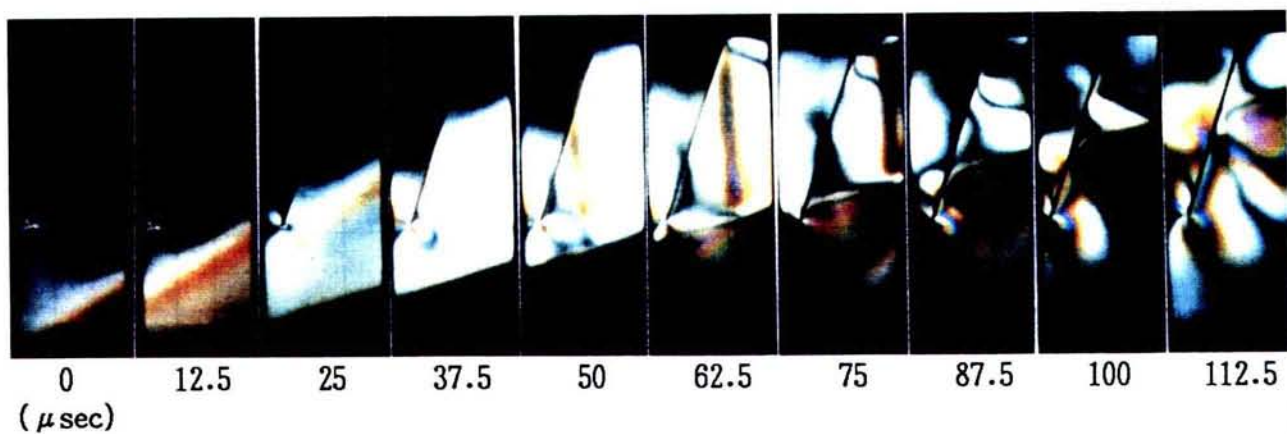


写真-4.2.10 模型M1002のR端衝撃による等色線縞模様写真<sup>H</sup>

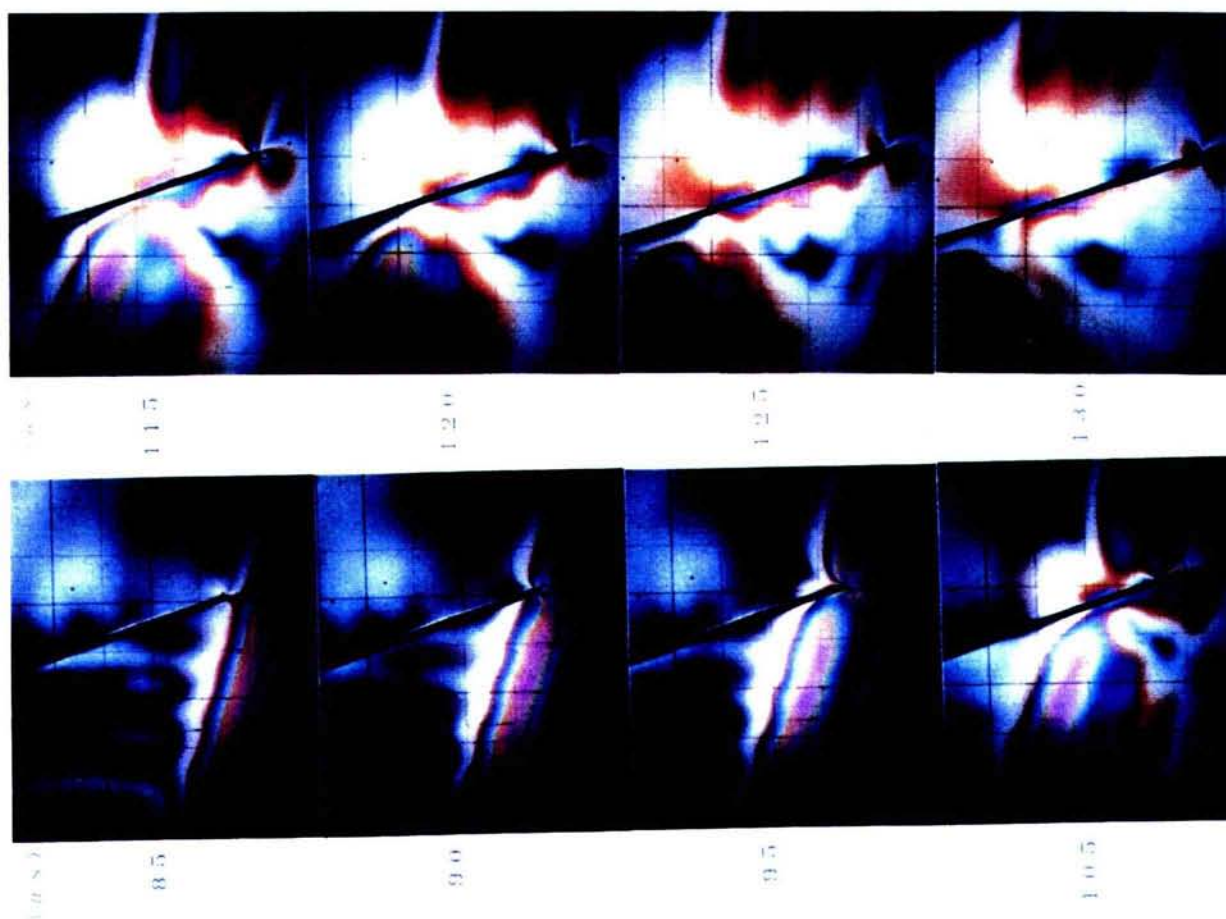


写真-4.2.11 模型M1002のR端衝撃による等色線縞模様写真<sup>R</sup>



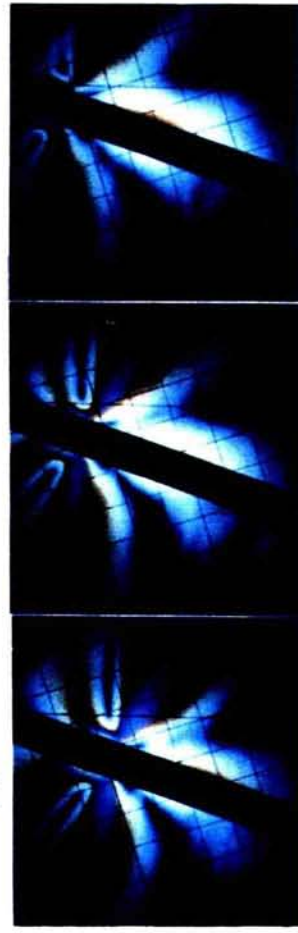
1100 1150 1200



1250 1300 1350



1400 1450 1500



1550 1600 1650

写真-4.2.12 模型R1004のL端衝撃による等色線縞模様写真<sup>R</sup>



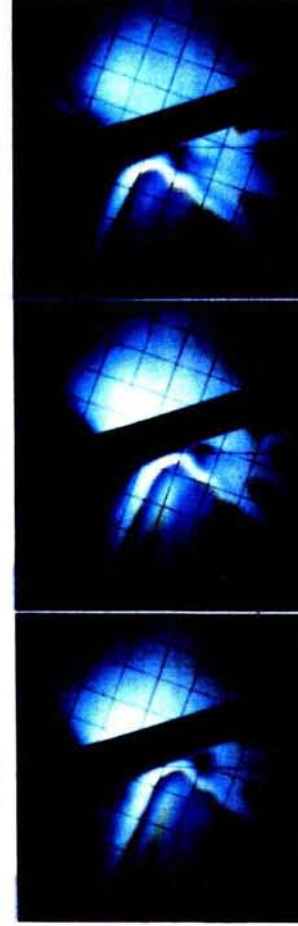
1300 1350 1400



1450 1500 1550



1600 1650 1700



1750 1800 1850

写真-4.2.13 模型R1004のR端衝撃による等色線縞模様写真<sup>R</sup>



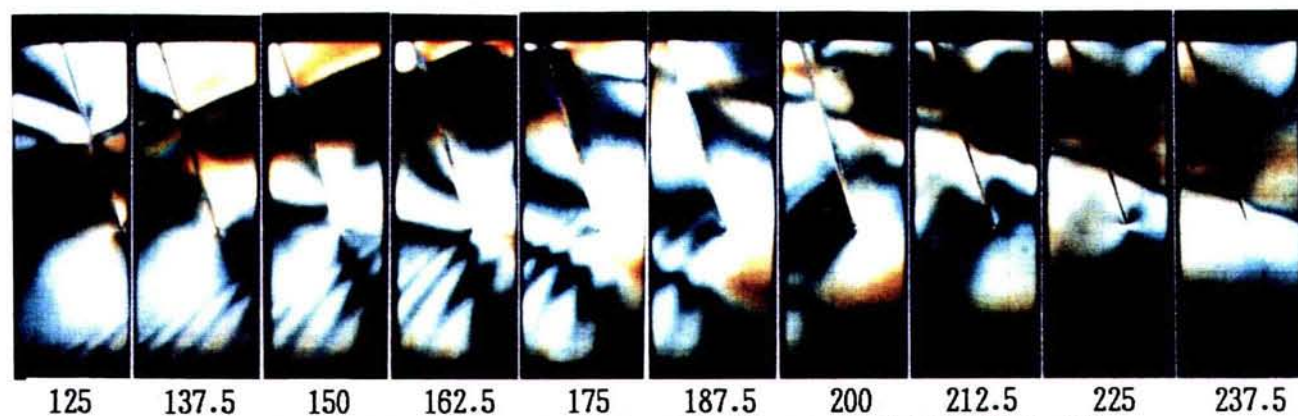
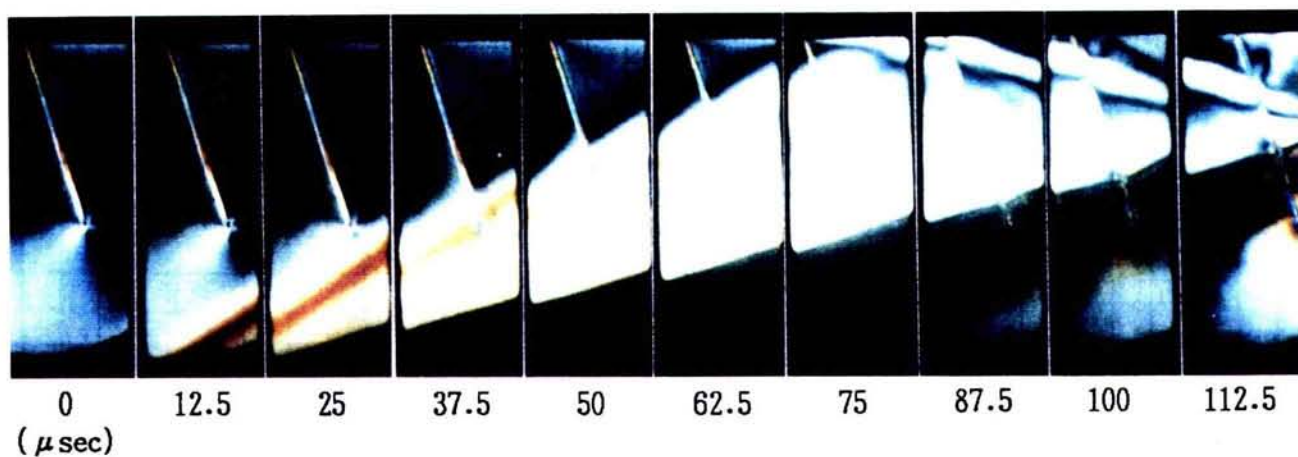


写真-4.2.14 模型M1302のL端衝撃による等色線縞模様写真<sup>H</sup>

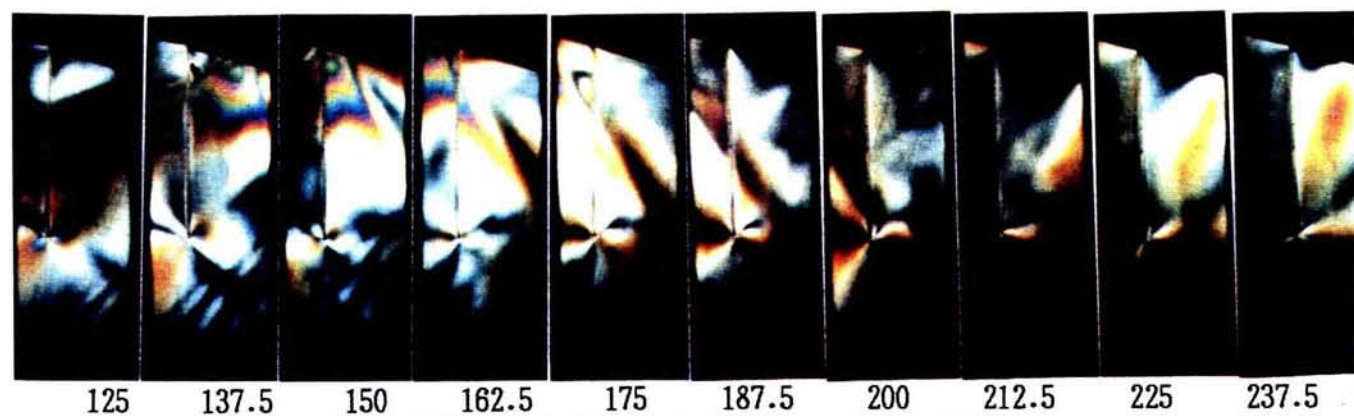
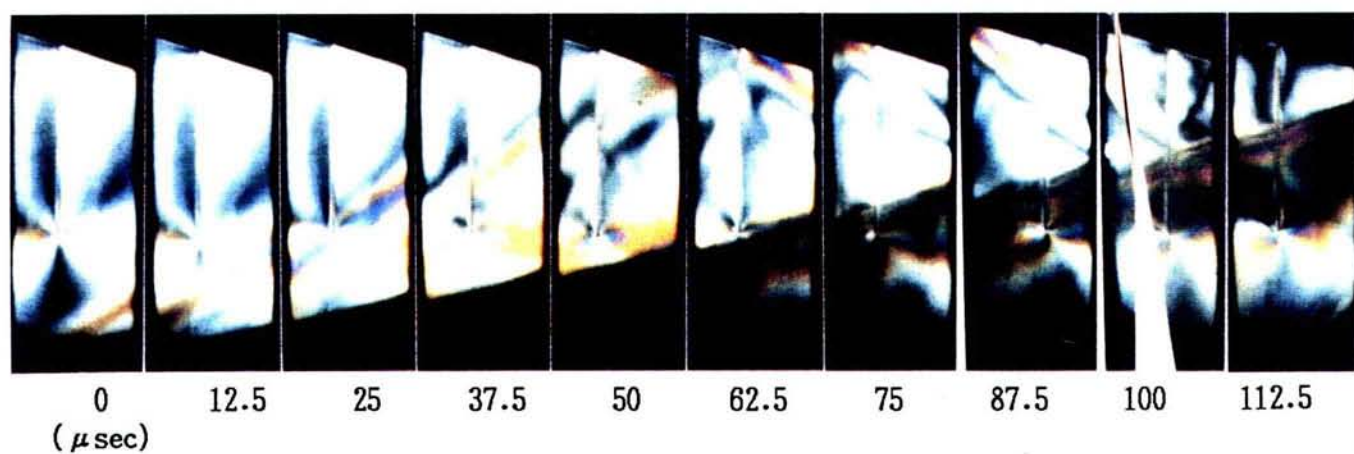
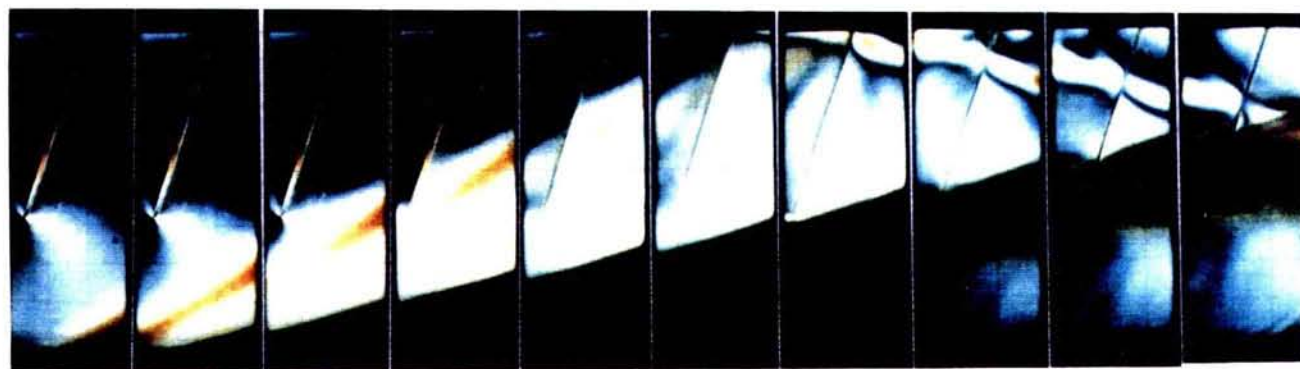
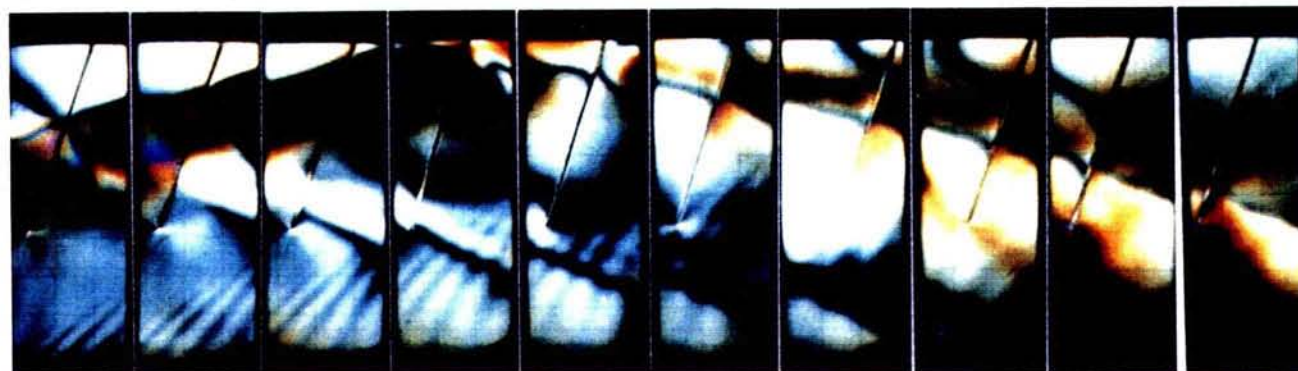


写真-4.2.15 模型M1303のR端衝撃による等色線縞模様写真<sup>H</sup>



0 12.5 25 37.5 50 62.5 75 87.5 100 112.5  
( $\mu\text{sec}$ )



125 137.5 150 162.5 175 187.5 200 212.5 225 237.5

写真-4.2.16 模型M1302のR端衝撃による等色線縞模様写真<sup>H</sup>



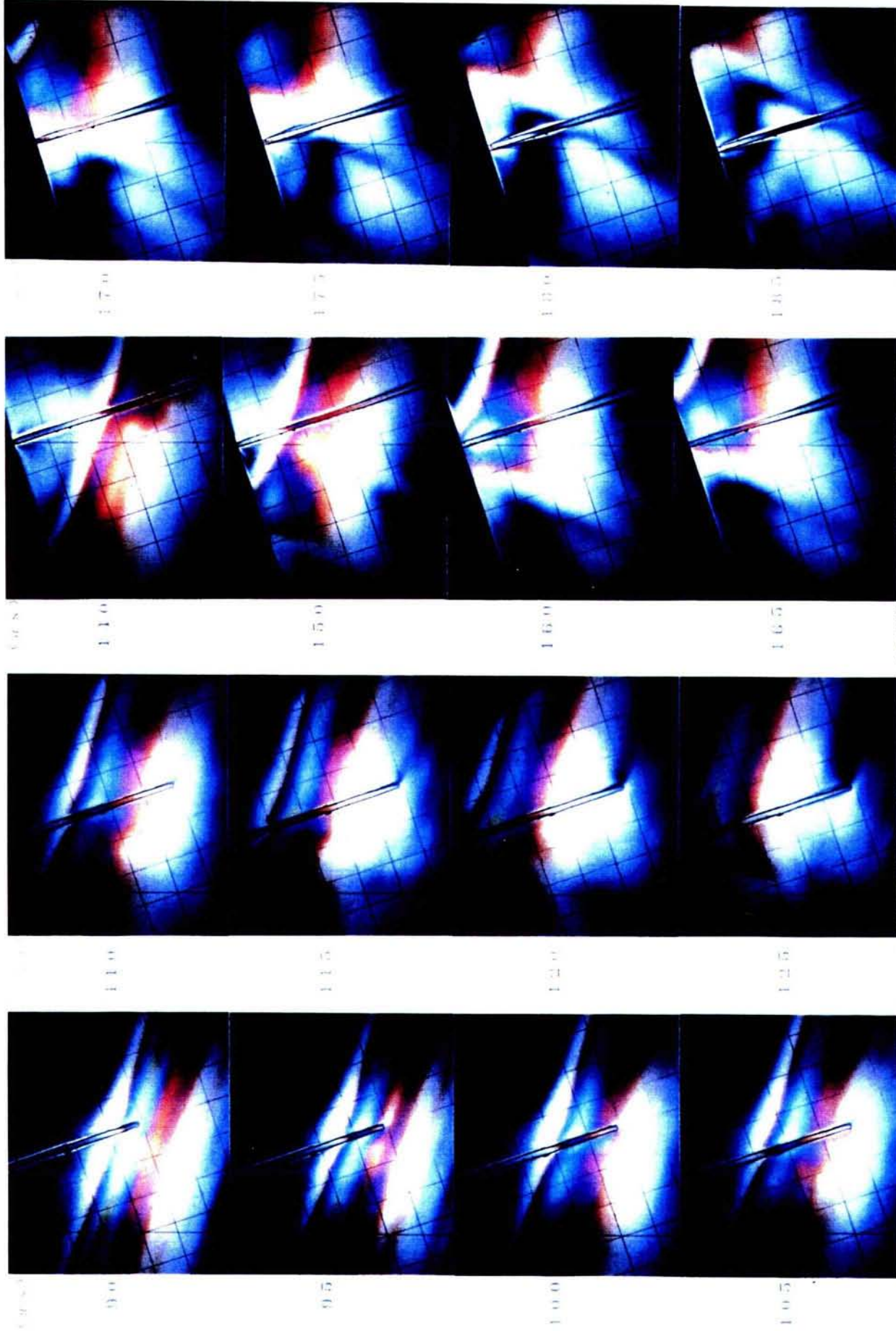


写真-4.2.17 模型R1302のR端衝撃による等色線模様写真<sup>8)</sup>

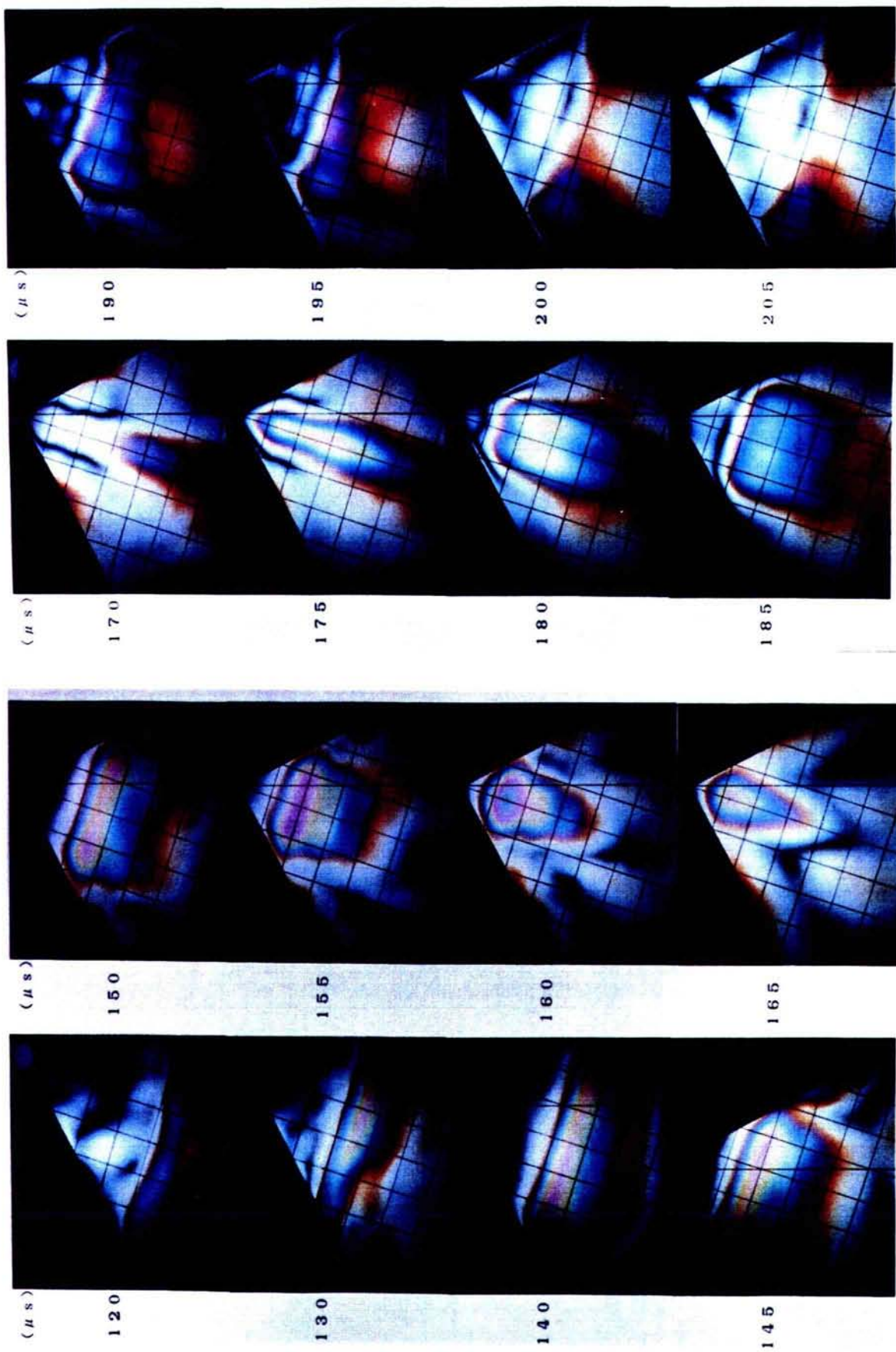


写真-4.2.18 模型R1005のL端衝撃による等色線縞模様写真<sup>R</sup>



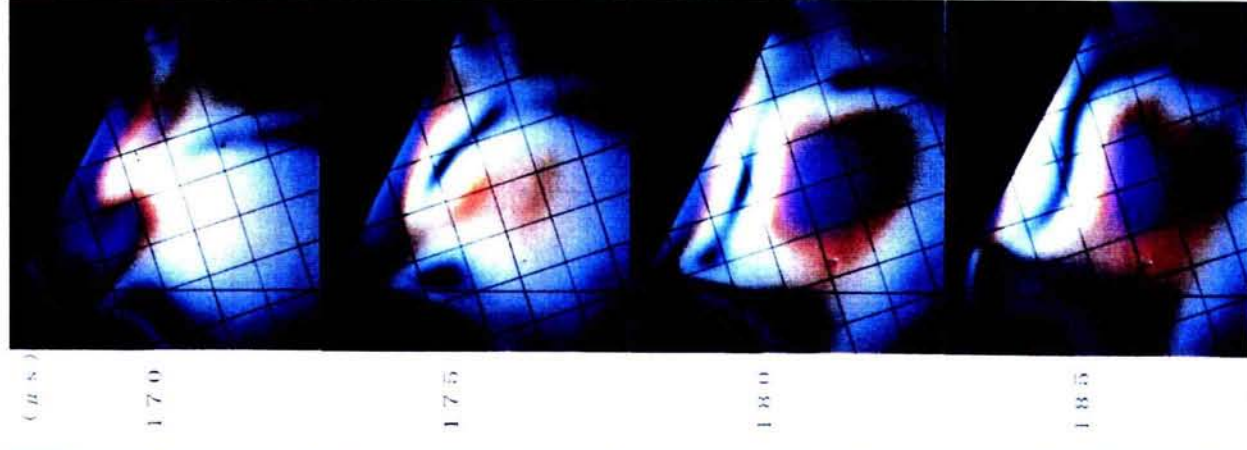
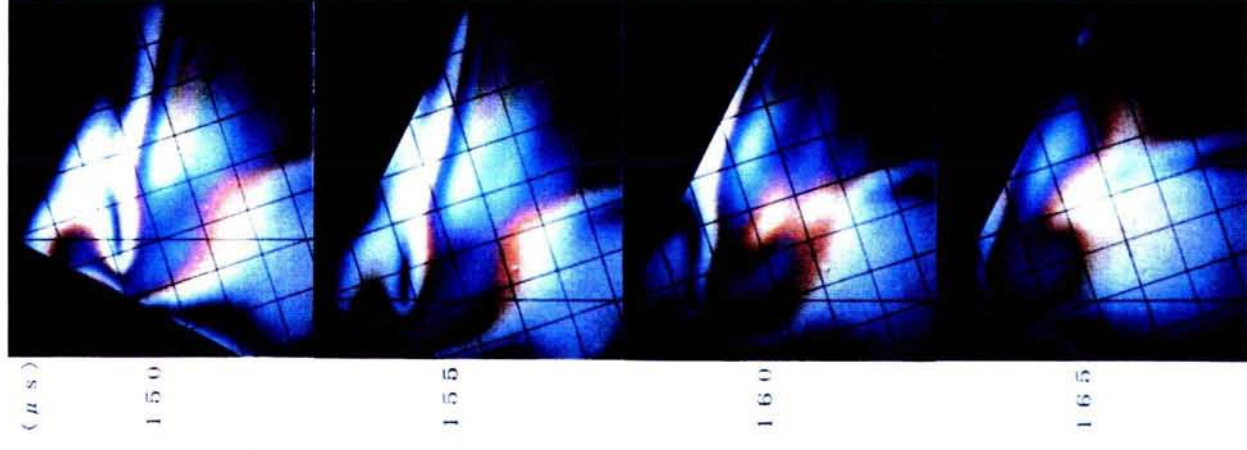
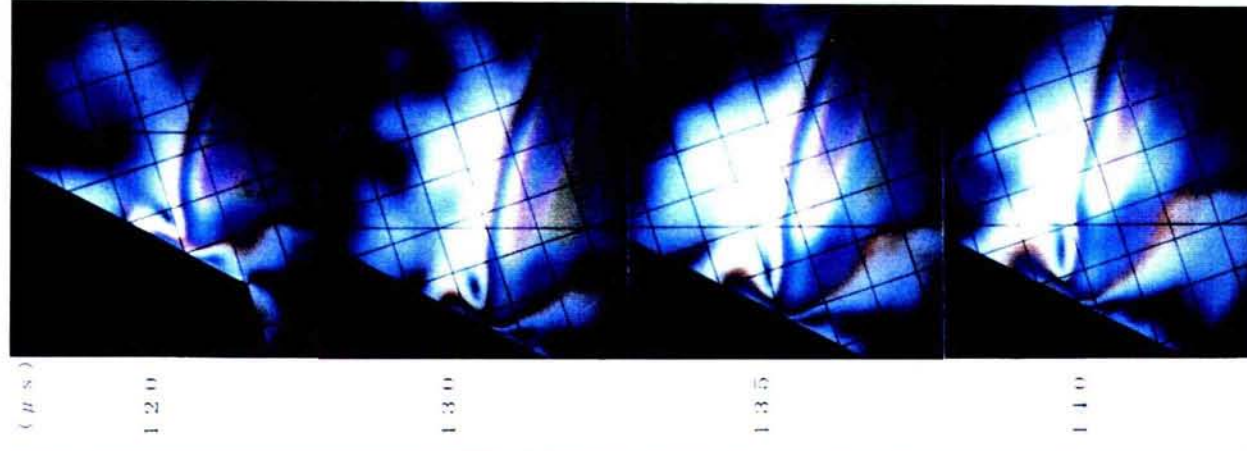
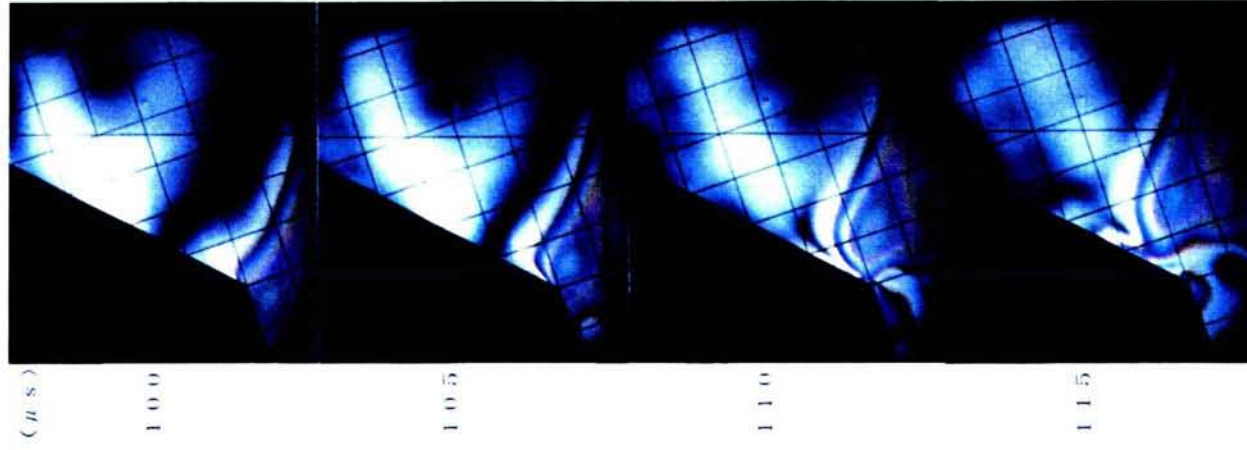


写真-4.2.19 模型R1005のR端衝撃による等色線縮模様写真<sup>R</sup>



写真-4.2.20 模型R1006のR端衝撃による等色線模様写真<sup>R</sup>

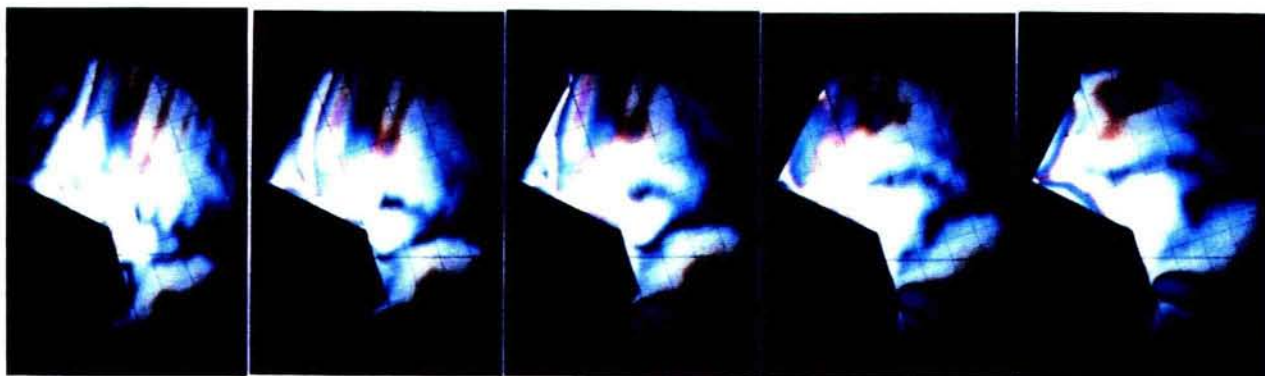


写真-4.2.20 模型R1006のR端衝撃による等色線模様写真<sup>R</sup>

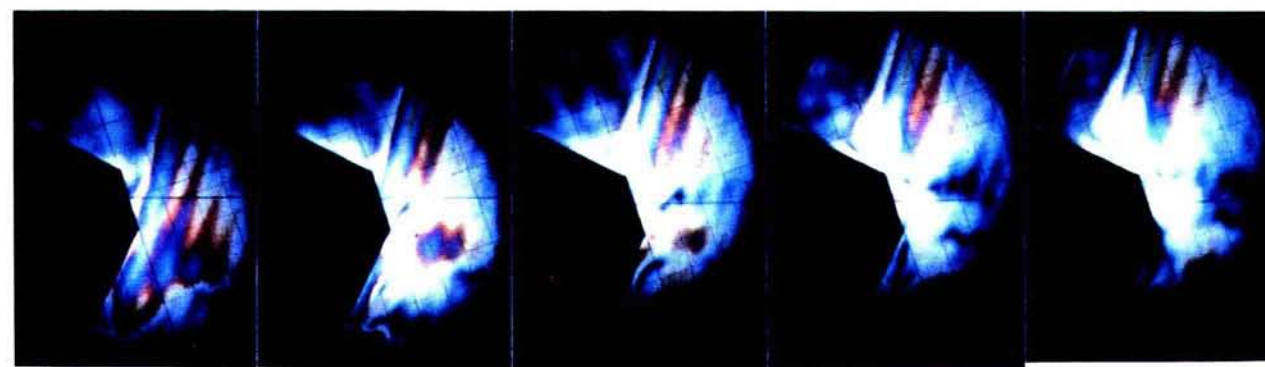


写真-4.2.20 模型R1006のR端衝撃による等色線模様写真<sup>R</sup>



写真-4.2.20 模型R1006のR端衝撃による等色線模様写真<sup>R</sup>



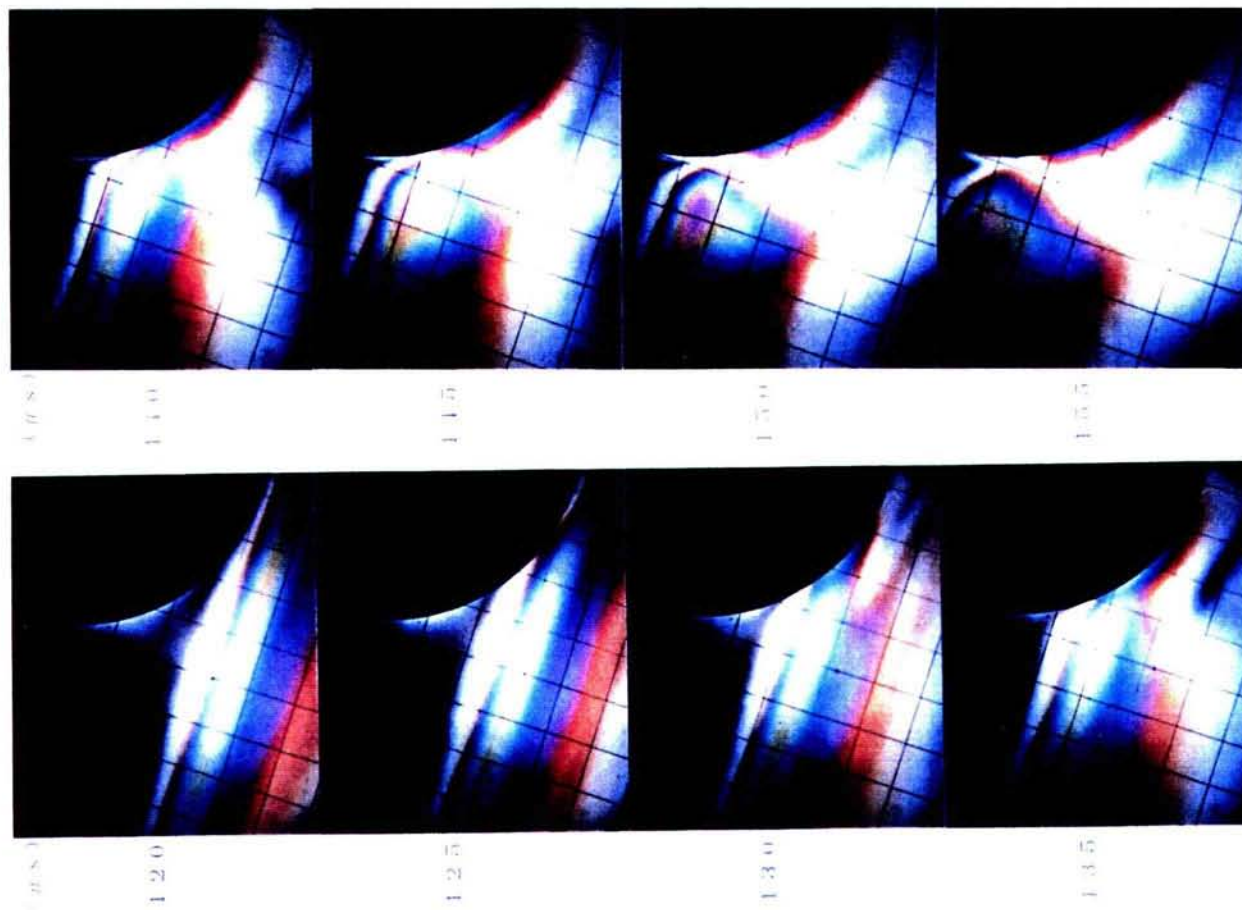


写真-4.2.22 模型M1008のL端衝撃による等色線縞模様写真<sup>R</sup>

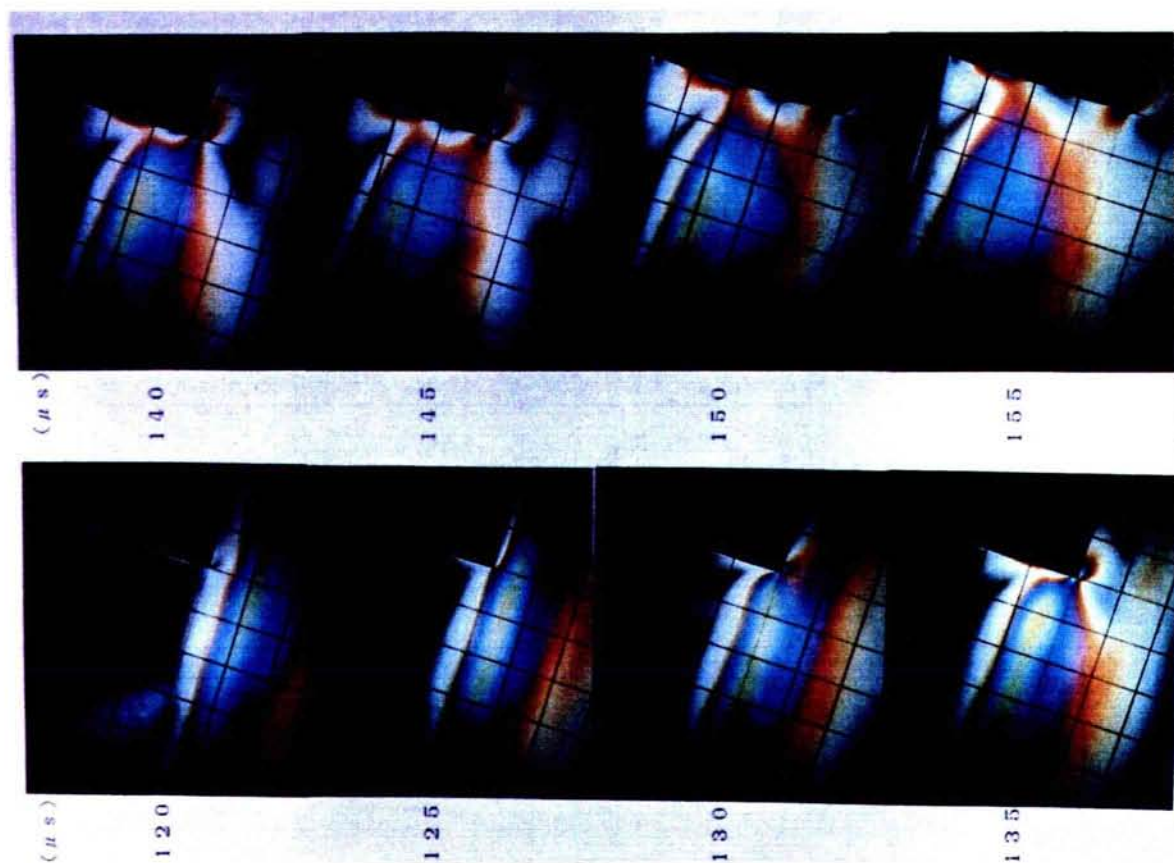


写真-4.2.21 模型M1007のL端衝撃による等色線縞模様写真<sup>R</sup>

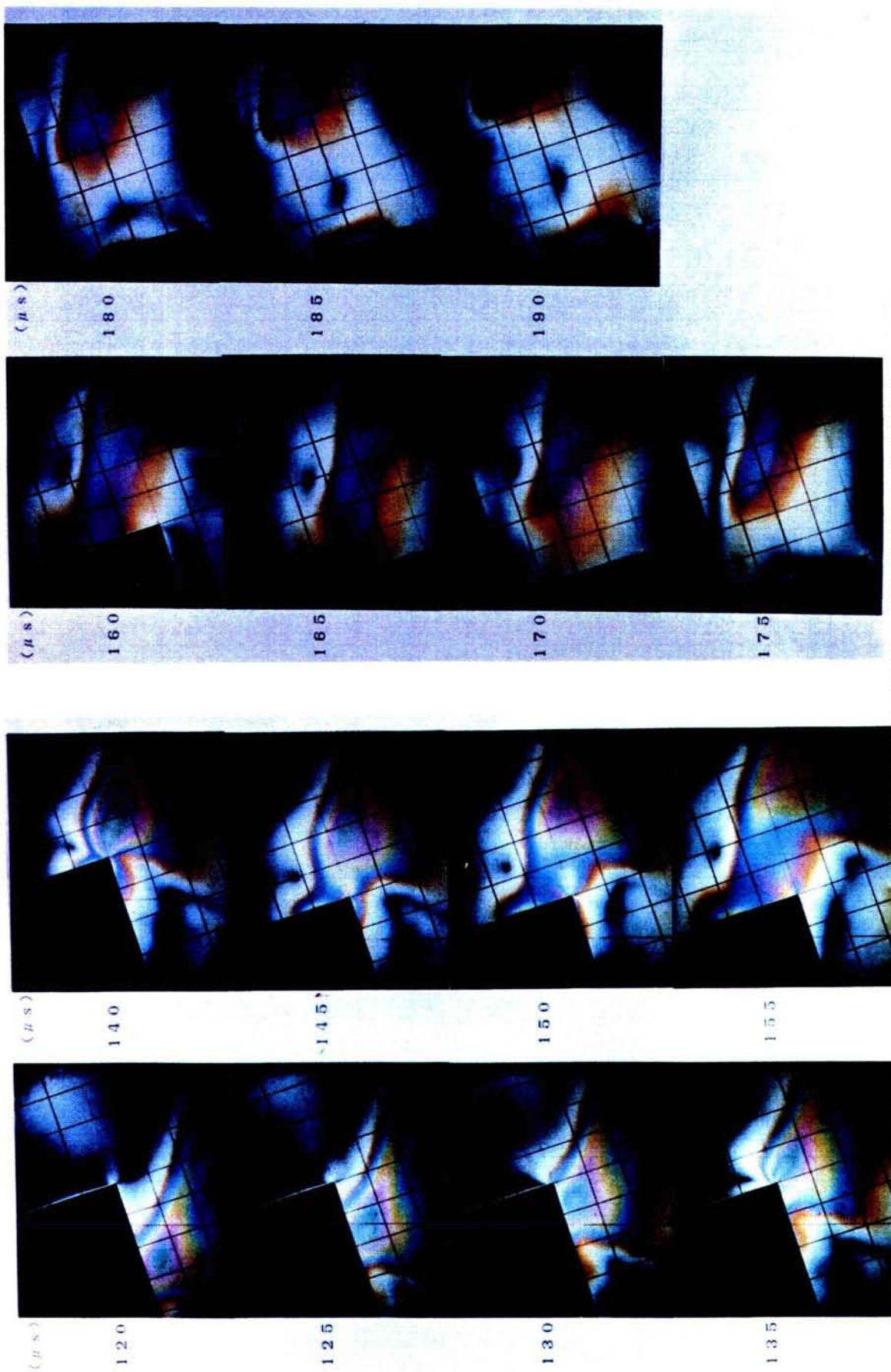


写真-4.2.23 模型M1007のR端衝撃による等色線編模様写真<sup>R</sup>



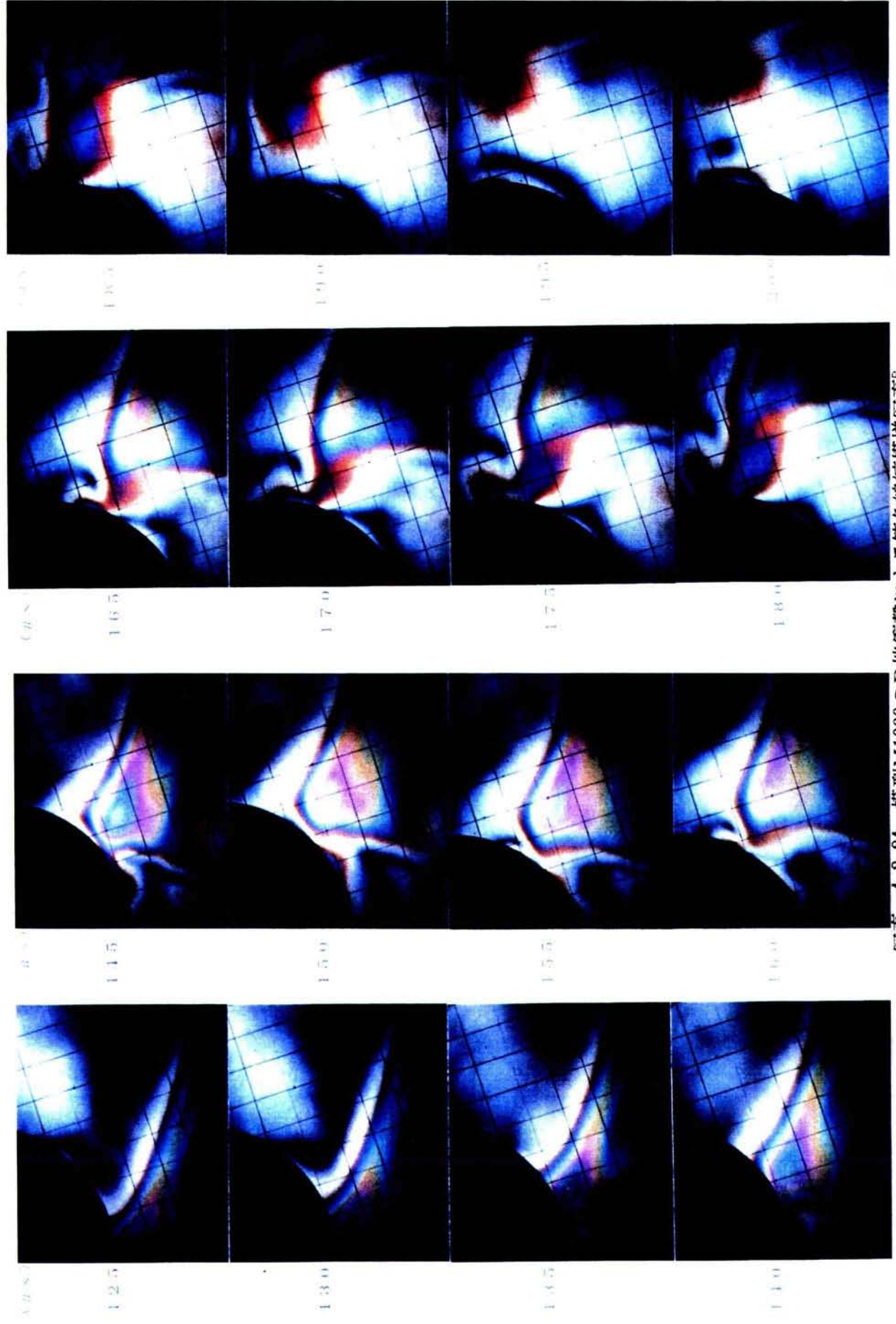


写真-4.2.24 模型M1008のR端衝撃による等色線縮模様写真<sup>R</sup>

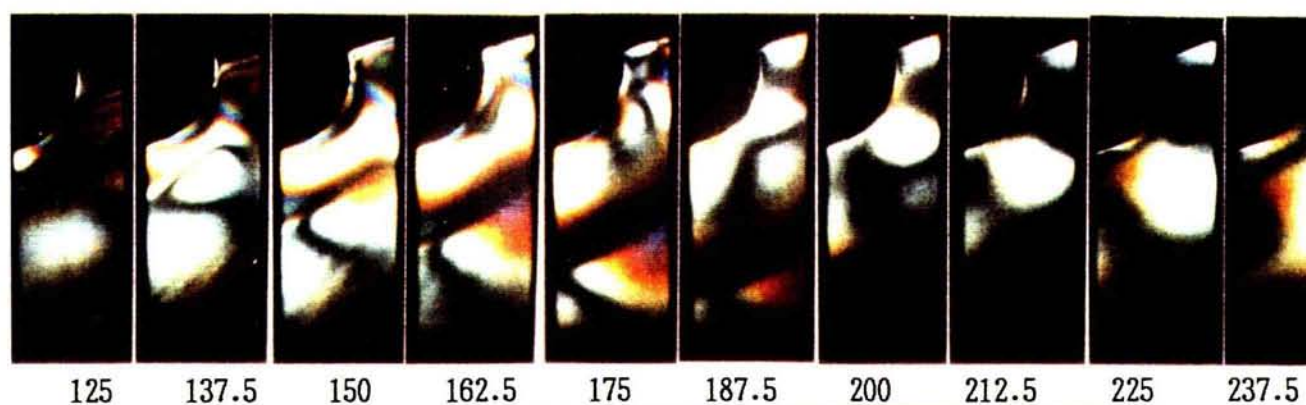
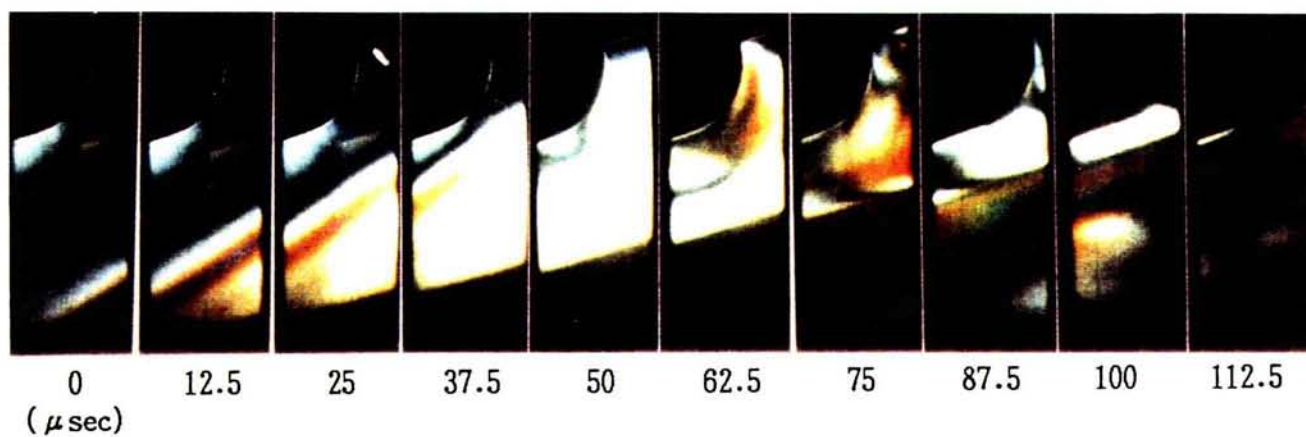


写真-4.2.25 模型M1008のL端衝撃による等色線縞模様写真<sup>H</sup>

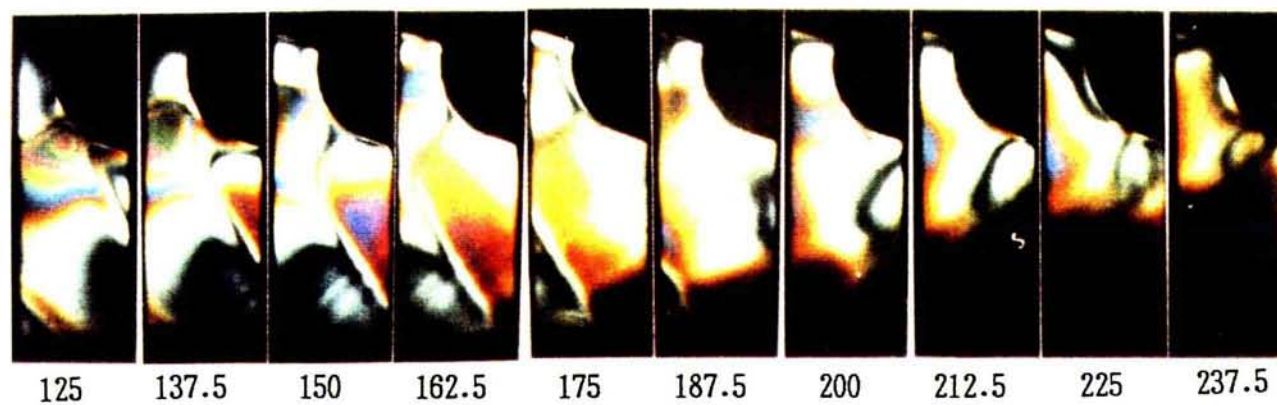
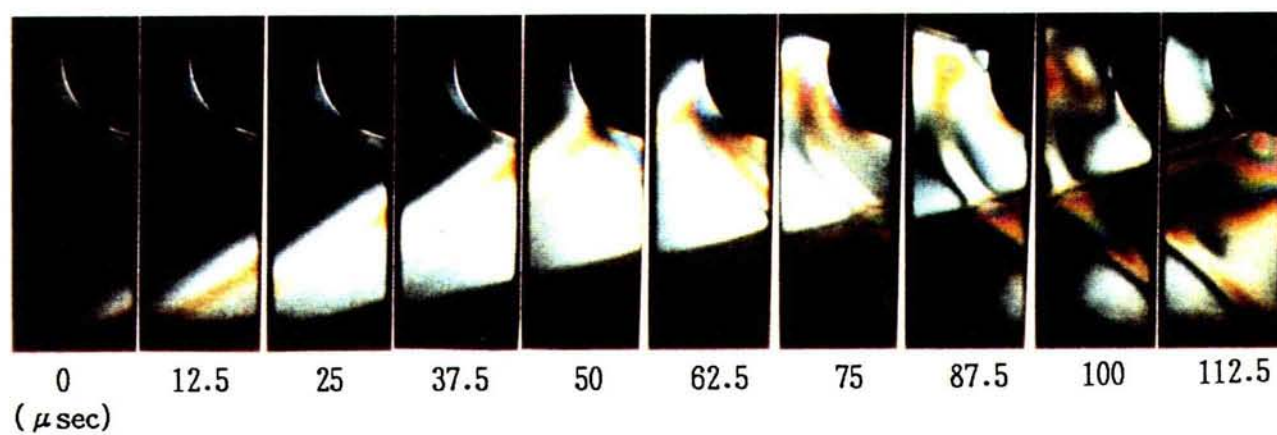


写真-4.2.26 模型M1008のR端衝撃による等色線縞模様写真<sup>H</sup>



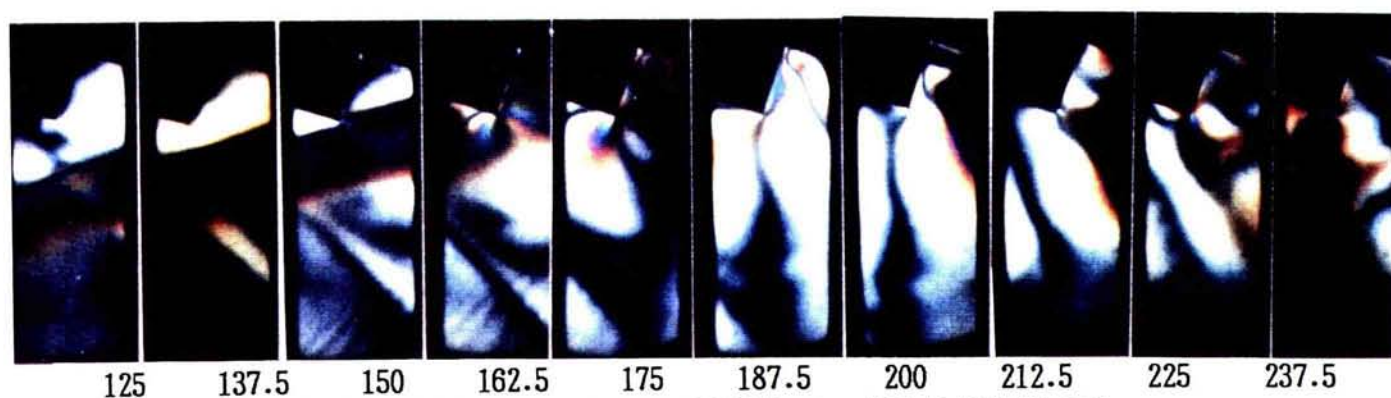
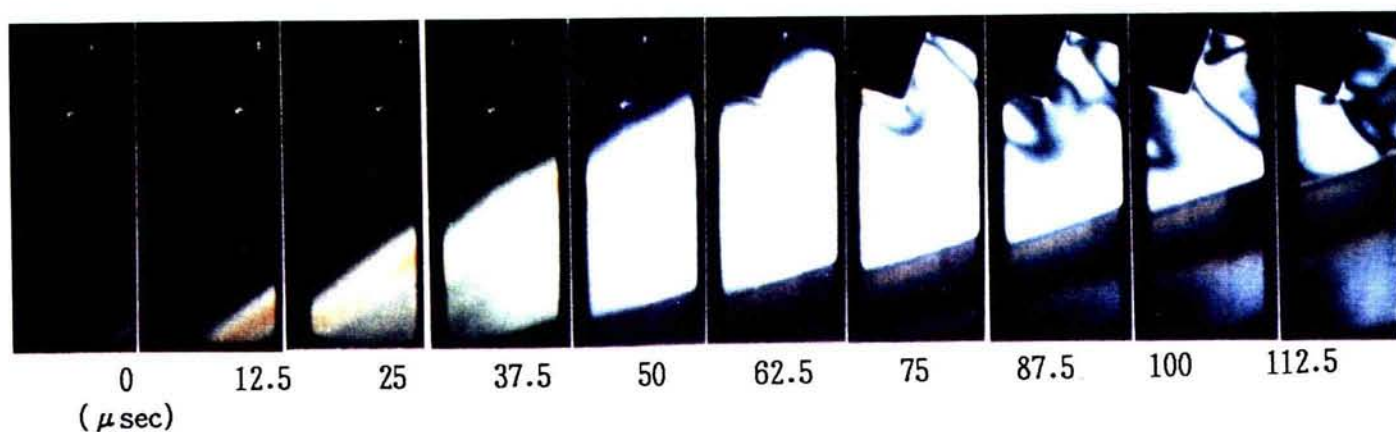


写真-4.2.27 模型M1009のR端衝撃による等色線縞模様写真<sup>H</sup>

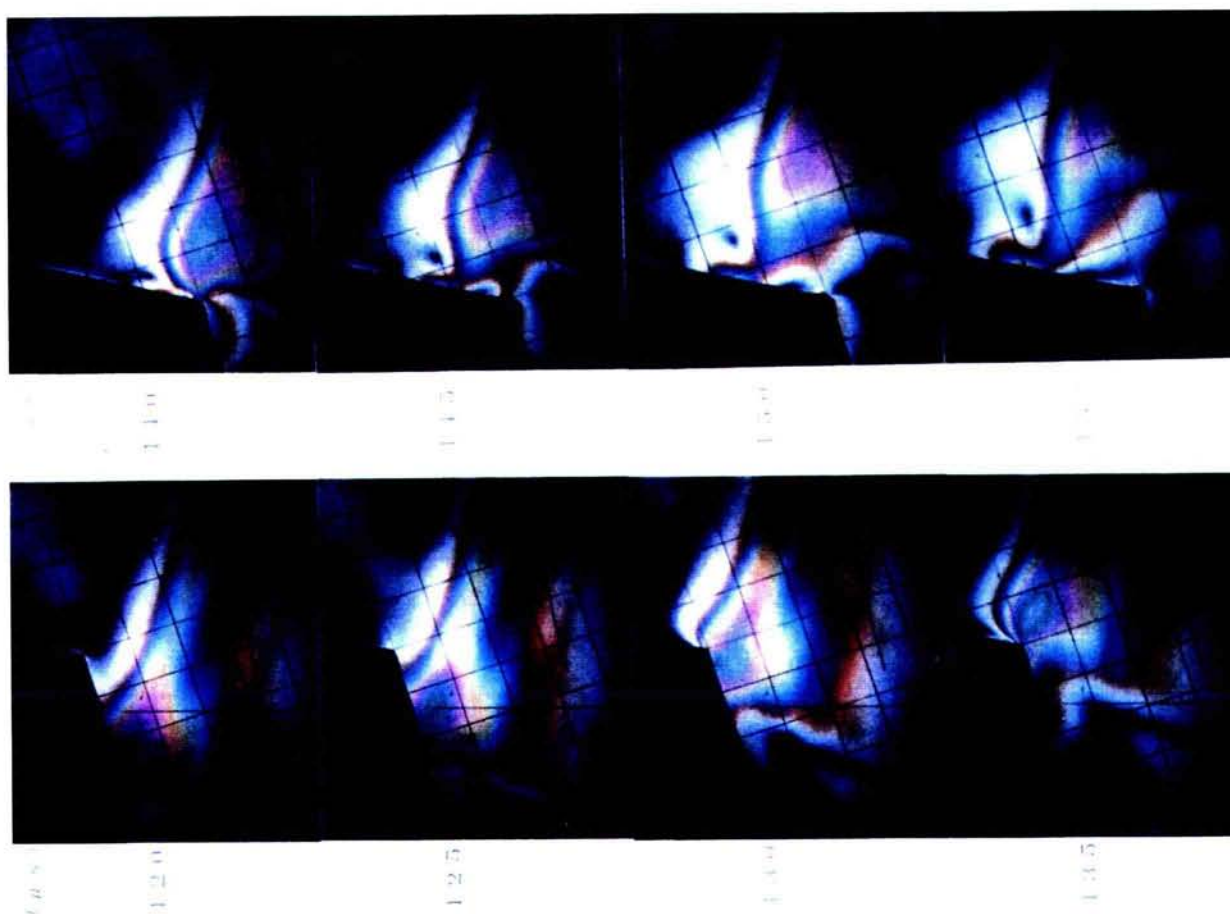


写真-4.2.28 模型M1010のR端衝撃による等色線縞模様写真<sup>R</sup>

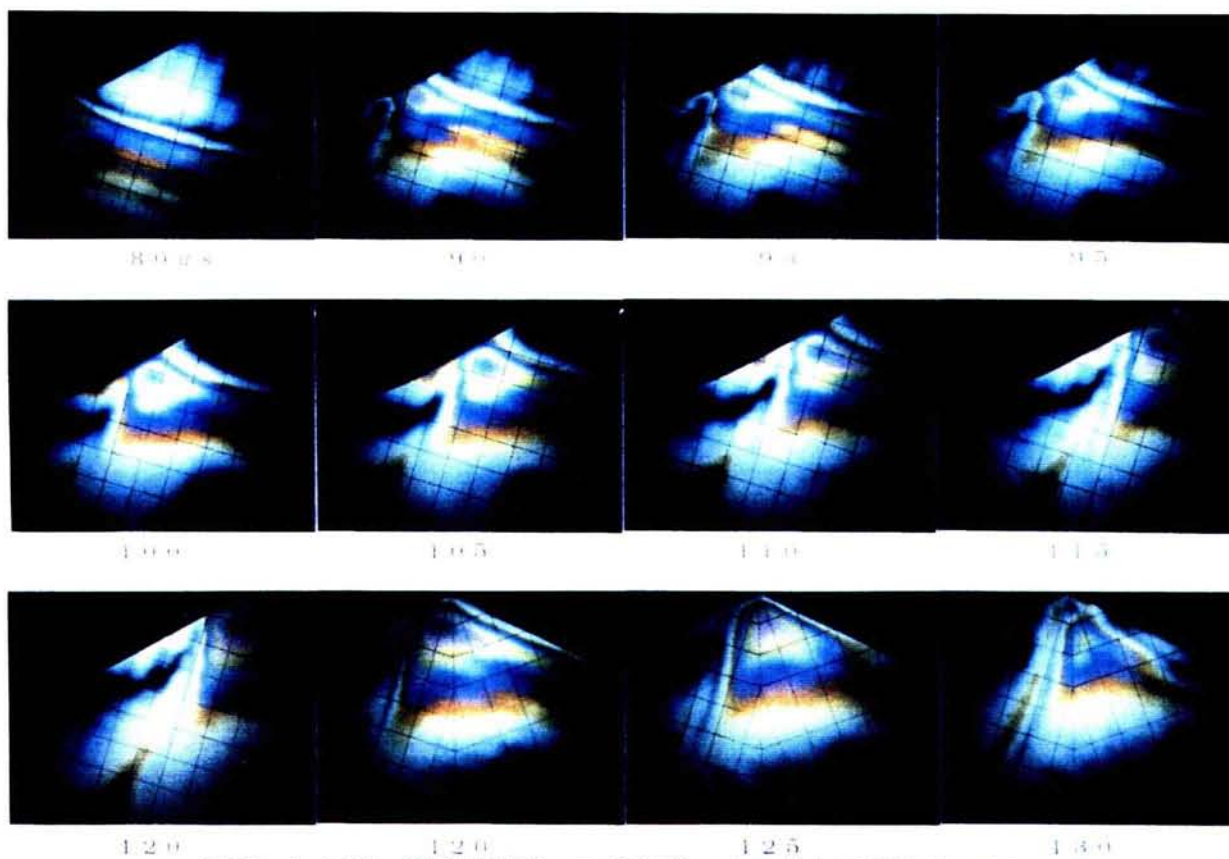


写真-4.2.29 模型R1011のR端衝撃による等色線縞模様写真<sup>R</sup>

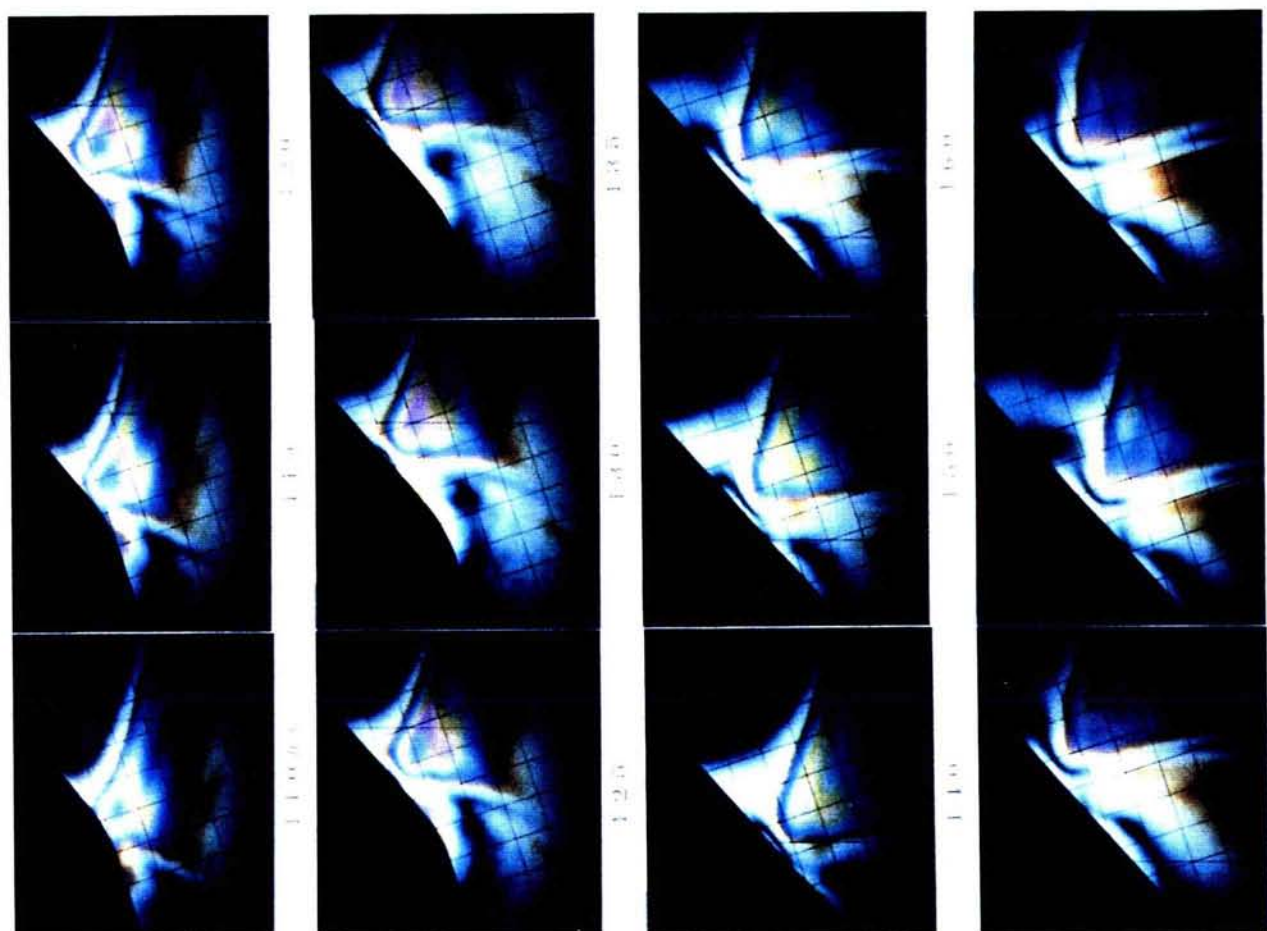
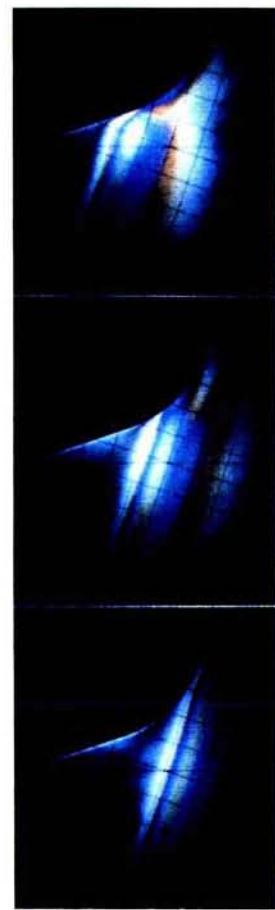


写真-4.2.30 模型R1012のR端衝撃による等色線縞模様写真<sup>R</sup>





120 130 140



150 160 170



180 190 200



210 220 230

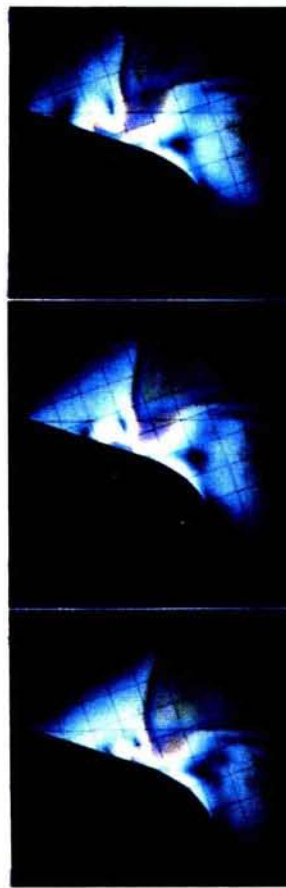
写真-4.2.31 模型R1013のL端衝撃による等色線縮模様写真<sup>R</sup>



110 120 130



140 150 160



170 180 190



200 210 220

写真-4.2.32 模型R1013のR端衝撃による等色線縮模様写真<sup>R</sup>

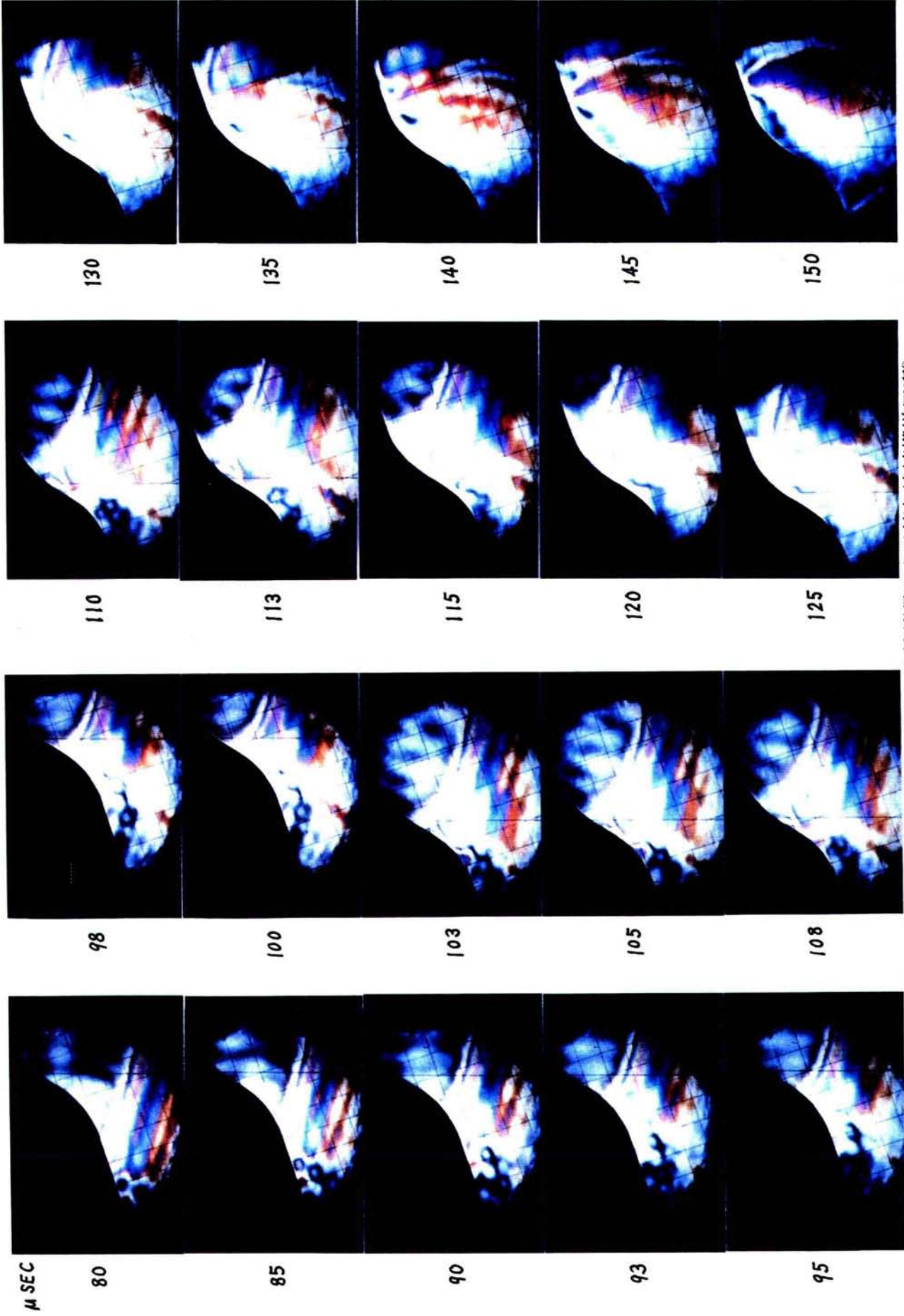


写真-4.2.33 模型R1014のR端衝撃による等色線縮模様写真<sup>R</sup>



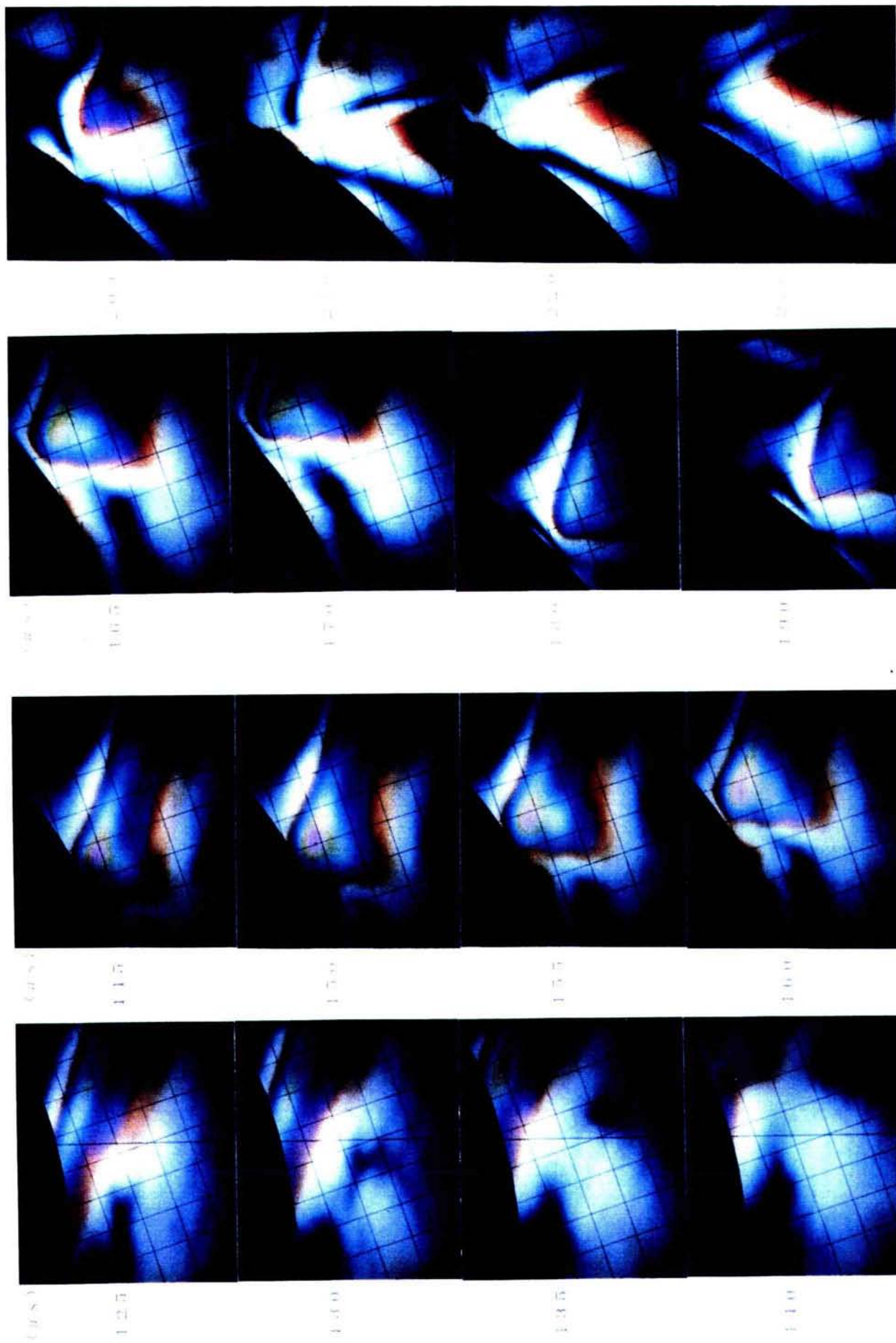
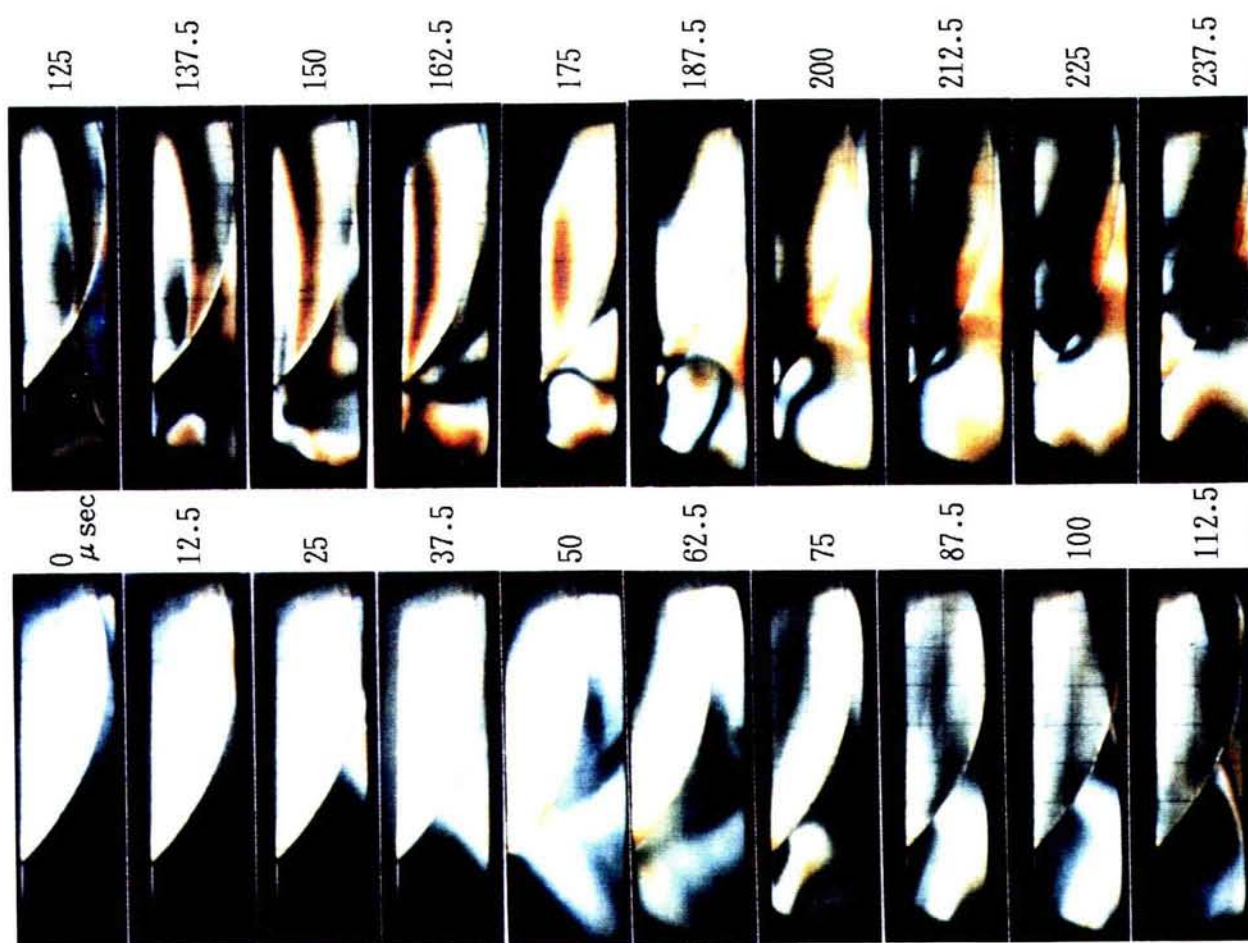
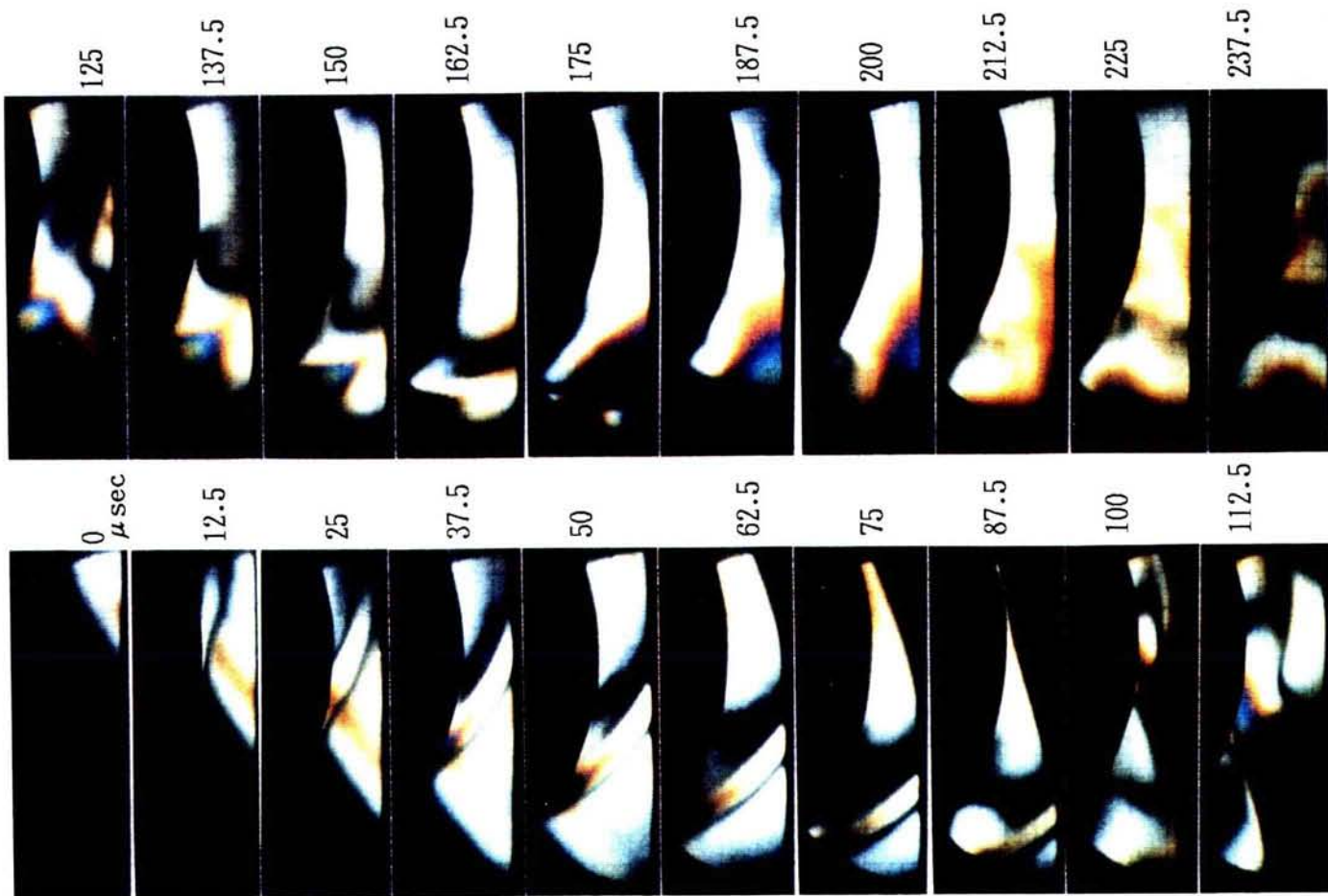


写真-4.2.34 模型R1015のR端衝撃による等色線縞模様写真<sup>R</sup>



↑写真-4.2.36 模型H1215のL端衝撃による等色線縞模様写真<sup>H</sup>

←写真-4.2.35 模型H1015のL端衝撃による等色線縞模様写真<sup>H</sup>



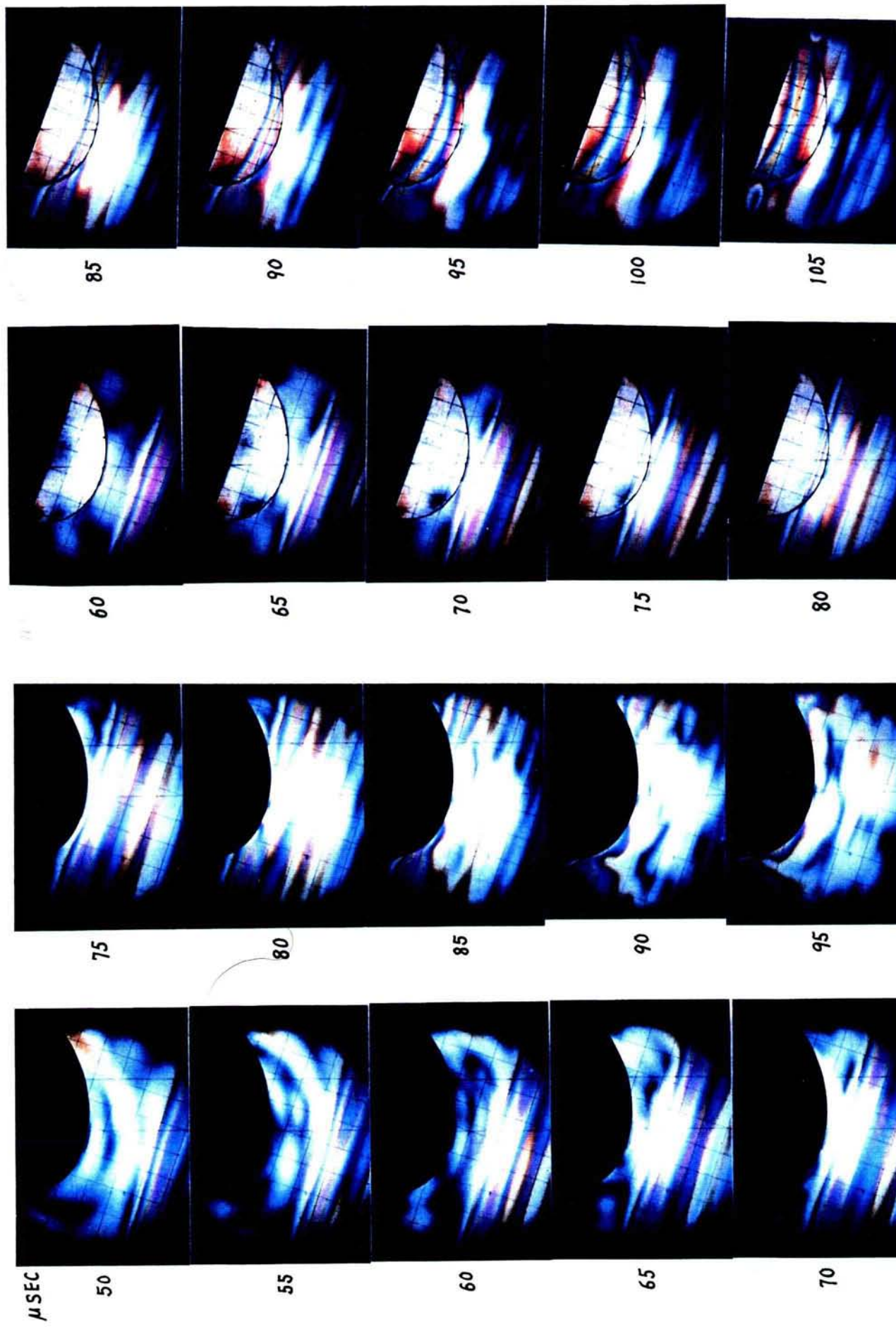


写真-4.2.37 模型R1016のL端衝撃による等色線縞模様写真<sup>※</sup>

写真-4.2.38 模型R1216のL端衝撃による等色線縞模様写真<sup>※</sup>

## 第5章 波動伝播問題の数値シミュレーション

### 第0節 緒言

第3, 4章では, 各種の地盤模型に対して動光弾性実験を行ない, 得られた等色線縞模様写真の縞模様変化および縞次数または縞次数比をもとに, 対象とした模型の波動挙動特性を考察した。このとき, 縞模様の縞次数によっては写真から読みとることが困難な場合があり, 他の同様の場合から類推せざるを得ない波動挙動があった。

そこでここでは, 動光弾性実験によって得た波動挙動を異なる観点から確認し補足する目的で, 比較的簡単な模型形状の波動挙動の数値シミュレーションを試みる。

波動伝播問題の理論的研究の経緯については第1章で述べた。地震波動に関する実際の問題を対象にした解析も多数行なわれているが, 複雑な地盤構造をそのまま解析対象にするには限度がある。

第4章で対象にした地盤模型の比較的簡単な場合についても, 一般には厳密解を得ることは困難であり, 入射波および境界条件の実際的な問題に対処するには数値シミュレーションを行なう必要がある。

すでに述べたように, 波動問題に対して数値シミュレーションを行なう方法は多数あり, 差分法 (FDM), 有限要素法 (FEM), 境界積分方程式法 (境界要素法: BEM) などでは代表的な例である。

特に, これらの中では最も新しく実用化された境界積分方程式法は, 境界条件の処理法が優れており, 複雑な境界形状を持つ線形問題に対して適用性が高いとされている。しかし, いずれの方法にもそれぞれ解析上のいくつかの問題点があり, 波動問題への応用に対して刻々改良されつつあるのが現状である。

ここでは, 上記の代表的な数値シミュレーション法のうち, 直線境界で構成された解析モデルに適用し易く, 時刻歴応答解析が比較的簡単であるという理由によって, 差分法を採用する。

本研究の波動解析の主題はすでに述べたように, 平面SV波が入射する場合の波動挙動であるから, 本章でも解析モデルに平面SV波が入射する条件のもとでの様々な波動挙動を対象にする。

これらの応答解析においては, 動光弾性実験で得られる等色線縞模様と比較する目的で, 等最大せん断応力線図を描く。また, 動光弾性実験からは得られないが, 表面波挙動など非均質波を検討する場合に必要な粒子運動を表現するために粒子速度ベクトルを描き, 等色線縞模様だけからでは判断できない挙動を補足説明する。

## 第5章 第1節 差分法による数値シミュレーション

### 5. 1. 1. 支配方程式

2次元線形弾性問題に対する波動方程式は、物体力を無視できる場合にはNavier の式(2.1.9) から、 $x$ 、 $z$  軸方向の変位成分をそれぞれ $u$ 、 $w$ として、

$$u_{tt} = C_L^2 u_{xx} + (C_L^2 - C_T^2) w_{xz} + C_T^2 u_{zz} \quad \dots\dots\dots(5.1.1a)$$

$$w_{tt} = C_L^2 w_{zz} + (C_L^2 - C_T^2) u_{xz} + C_T^2 w_{xx} \quad \dots\dots\dots(5.1.1b)$$

と書ける。

ここに、たとえば $w_{xz} = \partial^2 w / \partial x \partial z$ のように、変位成分の下添字 $x$ 、 $z$ および $t$ はその座標および時間に関する偏微分を表わす。また、平面ひずみ場に対しては

$$C_L = \sqrt{[(\lambda + 2\mu)/\rho]}, \quad C_T = \sqrt{[\mu/\rho]} \quad \dots\dots\dots(5.1.2a)$$

であるが、平面応力場に対しては $\nu$ をポアソン比として、 $\lambda$ の代わりに

$$\lambda \equiv \lambda^* = 2\mu\nu/(1-2\nu) \quad \dots\dots\dots(5.1.2b)$$

とする。その場合、式(3.2.4) で示したように $C_L = C_P$  となる。

$x$ 、 $z$  平面についての平面応力場の応力成分は、式(2.1.26)を参照して

$$\sigma_x = (\lambda + 2\mu) u_x + \lambda w_z, \quad \dots\dots\dots(5.1.3a)$$

$$\sigma_z = (\lambda + 2\mu) w_z + \lambda u_x, \quad \dots\dots\dots(5.1.3b)$$

$$\tau_{xz} = \mu (u_z + w_x), \quad \dots\dots\dots(5.1.3c)$$

$$\sigma_y = \tau_{xy} = \tau_{yz} = 0 \quad \dots\dots\dots(5.1.3d)$$

と書ける。

動光弾性実験はすべて平面応力場で行なわれ、その数値シミュレーションもすべて平面応力状態に対して行なうから、以下においては特に断わらない限り、 $\lambda$ は式(5.1.2b)の平面応力場の値を持つものとする。

### 5. 1. 2. 境界条件

#### 1) 自由境界

自由境界の条件はそこにおける単位法線ベクトルを $n_k$  として、式(2.1.20)で示した応力ベクトルを

$$t_j = \sigma_{jk} n_k = \{ \lambda u_{h,h} \delta_{jk} + \mu (u_{j,k} + u_{k,j}) \} n_k = 0 \quad (j, k, h = x, z) \quad \dots\dots\dots(5.1.4)$$

と置いて得られる。

たとえば、 $x$  軸に平行な自由境界では

$$\sigma_z = 0 : w_z + \eta u_x = 0, \quad \dots\dots\dots(5.1.5a)$$

$$\tau_{xz} = 0 : u_z + w_x = 0 \quad \dots\dots\dots(5.1.5b)$$

であり、 $z$  軸に平行な自由境界では

$$\sigma_x = 0 : u_x + \eta w_z = 0, \quad \dots\dots\dots(5.1.6a)$$

$$\tau_{xz} = 0 : u_z + w_x = 0 \quad \dots\dots\dots(5.1.6b)$$

である。

ここに、 $\eta = \lambda / (\lambda + 2\mu)$ である。

## 2) 非反射境界

地盤内の波動伝播の解析においては、注目領域に部分的に幾何学的または材料的に特別な状態が存在しても、巨視的には半無限領域を対象にすることになる。しかし、このような場合でも有限要素法あるいは差分法などの数値シミュレーションにおいては有限領域で解析せざるを得ない。そのため、そのままの取扱では有限の距離にある境界から波動が反射することが避けられず、波動解析における最大の障害となっている。

数値解析上有限な領域を無限領域化するという問題に対処する方法は大別すると二通りある。一つは解析領域を可能な限り大きくし、評価しようとする波動挙動が終了するまでは、注目領域に意図しない反射波が到達しないようにする方法である。他の一つは排除したい境界に特別な条件を与えて、波動が反射することなくそのまま通過するか、反射波が打ち消されるかまたは吸収されて二次的な波動を生じないようにする方法である。

ここでは後者の方法のうち、反射波が打ち消され、実質的に境界に達した波動がそのまま通過するような非反射境界を取り上げる。

非反射境界は non-reflecting boundary, transmitting boundary, absorbing boundary, silent boundaryなどと呼ばれ、上記の無限領域化の条件を満足させる方法が多数提案されているが<sup>5-1)</sup>、実用的な範囲であらゆる波動についてこの条件を完全に満たすことは極めて困難である。Lysmerら<sup>5-2,3)</sup>が提案した粘性境界と、Smithら<sup>5-4)</sup>が提案した滑動・固定境界 (lubricated-rigid boundary) はそれらの代表的なものであるが、非反射境界への入射角が大きいときあるいは Rayleigh 波、境界波などの非均質波に対しては完全ではない<sup>5-1)</sup>。

一次元場の変位波が固定境界へ入射するとき、反射波は入射波と同振幅で位相は逆転し入射波と符号が逆になり、一方、自由境界へ入射するとき、反射波は入射波と同振幅で同位相となることは第2章で導いた関係から明かである。したがって、同一の境界を固定と自由の両境界条件によって解き、両者を重ね合わせると反射波を消去することができる。

上記の Smithが提案した方法<sup>5-4)</sup>はこの考え方に沿ったもので、同一の境界を Dirichlet 問題および Neumann問題として扱うため混合境界条件法とも呼ばれる。しかし、この方法には一回の反射による反射波は消去できても、非反射境界が隅角をもち多重反射が生じ易い場合には、反射毎に重ね合わせを行わなければならない、重ね合わせの回数を増加させなければならない不便さがある。Kunarら<sup>5-5)</sup>はこの不便を解消する方法を提案しているが、ここでは後で示す解析モデルに設定した非反射境界において、二回以上の多重



反射を考慮する必要が無いと判断されるため、Smithが提案した方法を採用した。

本解析では、非反射境界の条件をできるだけ単純にするために、非反射境界を  $x$ 、 $z$  軸それぞれに平行に選んだ。

Smithの提案した非反射境界は図-5.1.1 に示すように、適用しようとする境界に境界-Aおよび境界-Bの2種類を設定し、それぞれの境界に以下の条件を与える。

(1)  $x$  軸に平行な非反射境界に対して

$$\text{境界-A: } \tau_{xz} = w = 0, \quad \dots\dots\dots(5.1.7a)$$

$$\text{境界-B: } \sigma_z = u = 0. \quad \dots\dots\dots(5.1.7b)$$

(2)  $z$  軸に平行な非反射境界に対して

$$\text{境界-A: } \tau_{xz} = u = 0, \quad \dots\dots\dots(5.1.8a)$$

$$\text{境界-B: } \sigma_x = w = 0. \quad \dots\dots\dots(5.1.8b)$$

上記の条件は図-5.1.1 に示したように、非反射境界上の各解析格子点において図示の方向の移動支点を設定した場合と同じことになる。

解析においては、半無限領域内に適当に定めた  $x$ 、 $z$  軸に平行な非反射境界を持つ有限領域に対して、支配方程式を上記の境界-Aおよび境界-Bの条件で独立に解き、それらを重ね合わせて平均すればよい。

### 3) 非均質境界

弾性性質の異なる媒体  $a$ 、 $b$  が接合された境界を非均質境界と呼ぶことにする。本解析では非均質境界も  $x$ 、 $z$  軸それぞれに平行になるように選んだ。

変位成分と Lamé の定数に媒体の番号を上添え字で示すと、非均質境界の条件は連続条件と釣合条件によって以下で表わされる。

(1)  $x$  軸に平行な非均質境界:

$$u^a = u^b \equiv u^c, \quad \dots\dots\dots(5.1.9a)$$

$$w^a = w^b \equiv w^c, \quad \dots\dots\dots(5.1.9b)$$

$$(\lambda^a + 2\mu^a)w^a_z + \lambda^a u^a_x = (\lambda^b + 2\mu^b)w^b_z + \lambda^b u^b_x, \quad \dots\dots\dots(5.1.9c)$$

$$\mu^a(u^a_z + w^a_x) = \mu^b(u^b_z + w^b_x). \quad \dots\dots\dots(5.1.9d)$$

ここに、添え字  $c$  は両媒体に共通な値であることを示す。

(2)  $z$  軸に平行な非均質境界:

式(5.1.9a,b,d)はそのまま、式(5.1.9c)の代わりに、

$$(\lambda^a + 2\mu^a)u^a_x + \lambda^a w^a_z = (\lambda^b + 2\mu^b)u^b_x + \lambda^b w^b_z \quad \dots\dots\dots(5.1.10)$$

とすればよい。

### 4) 入力境界と入射パルス

すでに述べたように、本研究では主としてSV波が入射する場合の応答に注目しているため、入力境界にSV波を入射させた場合について解析する。

解析領域へSV波を入射させる方法はいくつか考えられるが、本解析では、後で示すように入力境界を分割格子の方向に平行に選ばない場合がある。したがって、その場合にも簡単に入力できるように、動光弾性実験で得られた入射SV波パルス（最大せん断応力）から求めた入射変位パルスを用いる。

図-5.1.2 に、動光弾性実験における入射SV波パルスの最大せん断応力のピークを単位 ( $1\text{kg}/\text{cm}^2$ ) とした場合の入射変位パルス  $u_0(t)$  を示す。このとき、 $u_0(t)$  の最大値（一定値）は  $1.26 \times 10^{-4}\text{cm}$  となる。この変位パルスを解析モデル内に適当に定めた入力境界の差分格子点において、入射SV波の伝播方向と粒子運動方向に対応させて与える。具体的な入力法は5.1.4.6) で述べる。

### 5.1.3. 差分解析モデルと解析条件

#### 1) 均質モデル

図-5.1.3 (a), (b)に、差分解析に用いた均質モデルD0～D7を示す。図中の二重実線が非反射境界、破線と実線の二重線が入力境界である。また、解析に用いた空間および時間格子間隔を図中に示す。

以下に地盤模型と解析モデルの対応を示す。

D0: 基準模型 (M1000), D1: R1006, D2: R1005,  
D3: M1007, D4: 1009 (M1007), D5とD6: M1002,  
D7: M1003.

解析モデルの形は、動光弾性実験に使用した対応する地盤模型の形とかなり異なるが、その理由は5.1.4.6) で述べる。また、解析に用いた入力により模型内に記入した一点鎖線に平行な入射SV波面が得られる。さらに、5.1.4.6) (2) で述べる入力方法を用いた場合のC0も図中に示した。

#### 2) 非均質モデル

図-5.1.4 に、均質モデルの場合と同様に非均質地盤模型に対応する非均質モデルD10～D13およびそれぞれの格子間隔を示す。

以下に地盤模型と解析モデルの対応を示す。

D10: H1200, D11: 対応する地盤模型はない, D12: H1302,  
D13: H1303.

#### 3) 解析モデルの材料定数

差分解析に用いた材料定数は、表-3.3.2 (p.83) に示した値である。

#### 5. 1. 4. 均質モデルの差分表示<sup>5-6,7,8)</sup>

以下では、差分における空間分割は、 $x$ ,  $z$  座標方向それぞれを $\Delta x$ ,  $\Delta z$  とし、時間分割は  $\Delta t$  とする。したがって、空間と時間の格子点 (stencil) 番号を  $x$ ,  $z$ ,  $t$  座標の順に  $i$ ,  $j$ ,  $p$  とすると、 $x = i \Delta x$ ,  $z = j \Delta z$ ,  $t = p \Delta t$  となる。ただし、以下では座標を点  $(i, j)$  および時間  $p$  などと書く。

##### 1) 支配方程式の差分表示

式(5.1.1) を時間、空間に対する中央差分による陽型差分式で表現すると以下のようになる。

$$\begin{aligned} u_{i,j,p+1} = & 2u_{i,j,p} - u_{i,j,p-1} \\ & + C_L^2 m_x^2 (u_{i+1,j,p} - 2u_{i,j,p} + u_{i-1,j,p}) \\ & + C_T^2 m_z^2 (u_{i,j+1,p} - 2u_{i,j,p} + u_{i,j-1,p}) \\ & + (C_L^2 - C_T^2) (m_x m_z / 4) (w_{i+1,j+1,p} - w_{i+1,j-1,p} - w_{i-1,j+1,p} \\ & + w_{i-1,j-1,p}), \quad \dots\dots\dots (5.1.11a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_{i,j,p+1} = & 2w_{i,j,p} - w_{i,j,p-1} \\ & + C_L^2 m_x^2 (w_{i+1,j,p} - 2w_{i,j,p} + w_{i-1,j,p}) \\ & + C_T^2 m_z^2 (w_{i,j+1,p} - 2w_{i,j,p} + w_{i,j-1,p}) \\ & + (C_L^2 - C_T^2) (m_x m_z / 4) (u_{i+1,j+1,p} - u_{i+1,j-1,p} - u_{i-1,j+1,p} \\ & + u_{i-1,j-1,p}). \quad \dots\dots\dots (5.1.11b) \end{aligned}$$

ここに、 $m_x = \Delta t / \Delta x$ ,  $m_z = \Delta t / \Delta z$  である。

式(5.1.11)は時間について陽型であるから、図-5.1.5 のcalcuration stencil に示すように、次項で述べる実境界外の仮想格子点を除く一般内点に対して、時間  $p-1$  と  $p$  における変位成分が既知であれば時間  $p+1$  の変位成分が定まる。結局、逐次積分によって刻々の値を求めることができる。ただし、5. 1. 2. 2) で述べたように非反射境界を用いる場合は、境界-Aに対して求めた値  $u^A$ ,  $w^A$  と境界-Bに対して求めた値  $u^B$ ,  $w^B$  とを

$$u = (u^A + u^B) / 2, \quad w = (w^A + w^B) / 2 \quad \dots\dots\dots (5.1.12)$$

のように平均する必要がある。

##### 2) 境界条件の差分表示

すでに述べたように支配方程式は変位成分で表わされ、自由境界条件および非反射境界条件のうち一成分は応力成分で与えられるNeumann問題であるから、これらを支配方程式に対応するように中央差分式で表現するためには、実境界の外側に仮想の格子点 (pseudo nodes, fictitious line) を設ける必要がある<sup>5-9)</sup>。この仮想格子点の値は実境界内部の値が式(5.1.11)によって得られた後それらを用いて定められる。

図-5.1.6 に、解析モデルの一つであるモデルD4についての空間格子分割例（実際の格子分割とは異なる）を示す。図中の破線が仮想格子，二重実線が非反射境界，破線と実線の二重線が入力境界である。

(1) 隅角点以外の  $x$  軸または  $z$  軸に平行な自由境界

図-5.1.6 の境界  $AB$ ， $CD$  のように  $x$  軸に平行な自由境界では，一般にその境界が左右の隅角点  $(q, n)$  と  $(r, n)$  の間にあるとすると，式(5.1.5) から次式のように書ける。

$$q+1 \leq i \leq r-1$$

$$u_{i, n-1, p} = u_{i, n+1, p} + \xi (w_{i+1, n, p} - w_{i-1, n, p}), \quad \dots\dots\dots (5.1.13a)$$

$$w_{i, n-1, p} = w_{i, n+1, p} + \eta \xi (u_{i+1, n, p} - u_{i-1, n, p}). \quad \dots\dots\dots (5.1.13b)$$

ここに， $\xi = \Delta x / \Delta z$  である。

図-5.1.6 の境界  $BC$  のように  $z$  軸に平行な自由境界では，一般にその境界が上下の隅角点  $(m, h)$  と  $(m, k)$  の間にあるとすると，式(5.1.6) から次式となる。

$$h+1 \leq j \leq k-1$$

$$u_{m-1, j, p} = u_{m+1, j, p} + (\eta / \xi) (w_{m, j+1, p} - w_{m, j-1, p}), \quad \dots\dots\dots (5.1.14a)$$

$$w_{m-1, j, p} = w_{m+1, j, p} + (1 / \xi) (u_{m, j+1, p} - u_{m, j-1, p}). \quad \dots\dots\dots (5.1.14b)$$

(2)  $x$ ， $z$  軸方向に平行な辺で形成された凸隅角点

図-5.1.7 の点  $B$  のような凸隅角においては，仮想格子点  $B'$  の値を境界条件から定めることができず，pseudonodeの値が不足する。

一般に，考えている凸隅角点を  $(m, n)$  とすると，この点については自由境界の条件から

$$\sigma_x = \sigma_z = \tau_{xz} = 0 \quad \dots\dots\dots (5.1.15a)$$

でなければならない。

式(5.1.15a) の第1，第2式から，それぞれ

$$u_{m+1, n, p} = u_{m-1, n, p}, \quad w_{m, n-1, p} = w_{m, n+1, p} \quad \dots\dots\dots (5.1.15b)$$

のように，実境界を挟んで対称な格子点の値が等しくなるように求まる。

式(5.1.15a) の第3式からは

$$\xi (u_{m, n-1, p} - u_{m, n+1, p}) = w_{m+1, n, p} - w_{m-1, n, p} \quad \dots\dots\dots (5.1.15c)$$

となり， $u_{m, n-1, p}$  と  $w_{m+1, n, p}$  の値が定まらない。

そこで便宜上，式(5.1.15b) で得られた関係がここでも成立するものと考えて，

$$u_{m, n-1, p} = u_{m, n+1, p}, \quad w_{m+1, n, p} = w_{m-1, n, p} \quad \dots\dots\dots (5.1.15d)$$

と仮定した。

上記のように定めても，図-5.1.6 の点  $B'$  に対応する仮想格子点  $(m+1, n-1)$  の値は未定のままである。この点の値を定めるために以下の方法を採用した。

$i = m+1$  および  $j = n-1$  の仮想格子に沿って，それぞれ点  $(m+1, n)$  および  $(m, n-1)$  で Taylor 展開し，点  $B'$  で得られた二つの値の平均値を点  $B'$  の値とする。

したがって，時間に無関係に

$$(u, w)_{m+1, n-1} = 1.25(u, w)_{m+1, n} - (u, w)_{m+1, n+1} + 0.25(u, w)_{m+1, n+2} \\ + 1.25(u, w)_{m, n-1} - (u, w)_{m-1, n-1} + 0.25(u, w)_{m-2, n-1} \\ \dots\dots\dots(5.1.16)$$

となる。

ここに、( , )内の値はその順で両辺が独立に成立することを示す。

### (3) x, z 軸方向に平行な辺で形成された凹隅角点

図-5.1.6 の点Cのような凹隅角点では、境界BCと境界CDに沿う仮想格子点上の点C'で、それぞれの境界の自由境界条件を満足するが異なる値をもつて重なり、pseudo-nodeの値が過剰になる。この点の合理的な決定法を求めて試行錯誤した後、凹隅角点を ( m, n) とするとき、両境界の自由境界条件から求められた二つの値、 $(u, w)'_{m+1, n-1}$  および  $(u, w)''_{m+1, n-1}$  の平均値としてこの点の値を定めることにした。すなわち、

$$(u, w)_{m+1, n-1} = \{ (u, w)'_{m+1, n-1} + (u, w)''_{m+1, n-1} \} / 2 \quad \dots\dots(5.1.17)$$

とする。

### (4) x, z 軸方向に平行でない直線自由境界

図-5.1.3 に示す均質モデルD1, D2の二等辺三角形部分の等辺のように、x, z 軸方向に平行でない自由境界が存在する。この場合の境界条件の差分表示を示す。ただし、本解析ではx軸と45°をなす場合に限られるから、等分割の正方格子 ( $\Delta x = \Delta z$ ) で解析する。

図-5.1.7 に三角形部分の格子分割例を示す。

一般に、変位成分を式(5.1.11)によって求めるためには、図-5.1.5 に示したように、時間pについては求めたい点を囲む8個の格子点の値を必要とする。したがって、たとえば自由境界AB上の点Mの値を求めるには、点Mを囲む8個の格子点 (P, Q, K, R, J, N, H, I) の値が必要である。しかし、未知格子点はこのうちの自由境界外にあるP, Q, Rの3個の仮想格子点である。

いま、図-5.1.7 に示すように新しい座標系をX, Z軸とし、それぞれの方向の変位成分をU, Wとする。U, Wとu, wのそれぞれの成分間の関係は

$$(U, W) = (u - w, u + w) / \sqrt{2}, \quad \dots\dots\dots(5.1.18a)$$

$$(u, w) = (U + W, -U + W) / \sqrt{2} \quad \dots\dots\dots(5.1.18b)$$

である。

いま、新しい座標系X, Zについて点Mと点Nの中央に仮想格子点Lを考え、その点に対して自由境界条件

$$\sigma_z = 0 : W_z + \eta U_x = 0, \quad \dots\dots\dots(5.1.19a)$$

$$\tau_{xz} = 0 : U_z + W_x = 0 \quad \dots\dots\dots(5.1.19b)$$

と式(5.1.18)を適用すると、式(5.1.19)の差分表示は式(5.1.13)と同様であるから、点M, N, Hの値を用いて点Rのx, z座標の変位成分が以下のように求まる。

$$u_R = u_H + \{ (\eta + 1)(u_M - u_N) + (\eta - 1)(w_N - w_H) \} / 2, \quad \dots\dots(5.1.20a)$$

$$w_R = w_H + \{(\eta + 1)(w_M - w_N) + (\eta - 1)(u_M - u_N)\} / 2. \quad \dots\dots\dots (5.1.20b)$$

また、点Qの値と点Pの値も同様にして、それぞれ点K, M, Jおよび点K, N, Iを用いて求められる。

(5) x, z 軸方向に平行でない辺で形成される隅角点

図-5.1.7 の三角形部分の凸隅角Aに関する格子点A' とA'' については、(4)によっても求められない。そこで、点A' の値は直線B'A' 上にある格子点の値を、B'A' 方向にTaylor 展開して求めた点A' の値と、辺CAに関して同様にして求めた対応する値との平均値とした。また、点A'' の値は直線B''A'' 上にある格子点の値を、B''A'' 方向にTaylor 展開して得られる値とした。

なお、点B' の値は差分解析上(3)の場合と同様に、点Bより左側の水平な自由境界の条件と辺BAの自由境界条件とを満足する必要があるが、ここでは(4)の場合の点Rと同様にして求まる値をそのまま用いた。

### 3) スリット部の差分表示

図-5.1.3 に示した均質モデルのうち、スリットを有するモデルのスリット部の境界条件はやや特殊な条件となるので、以下にその境界条件の差分表示を示す。

図-5.1.8 (a), (b)に、それぞれスリット部の左境界および右境界における格子分割例を示す。スリット開口部の凸隅角およびスリット底部の凹隅角の取扱い方については、前項の(2), (3)で述べた通りである。

スリット部の境界条件の特徴はスリット底面BCにある。スリット幅は最小でも1格子間隔必要であり、その場合にはBC間に格子点がないから、そのままではBCが自由境界である条件を満足させることができない。そこで、境界条件式(5.1.5)を満足させるために、左右のスリット境界からそれぞれ  $\Delta x'$  の距離に仮想格子を設け、BC上にそれぞれ格子点B', C'を設定した。これによってスリット底面は不等格子分割となる。

一般に、図-5.1.8 (c)に示すような不等空間分割に対しては、波動方程式(5.1.1)の(i, j)に関する中央差分式は以下となる。

$$\begin{aligned} u_{i,j,p+1} = & 2u_{i,j,p} - u_{i,j,p-1} \\ & + \{2C_L^2/(1+m)\} m x_1^2 \{u_{i+1,j,p} - (1+m)u_{i,j,p} + m u_{i-1,j,p}\} \\ & + \{2C_T^2/(1+n)\} m z_1^2 \{u_{i,j+1,p} - (1+n)u_{i,j,p} + n u_{i,j-1,p}\} \\ & + \{(C_L^2 - C_T^2)/(1+m)(1+n)\} (m x_1 m z_1) (w_{i+1,j+1,p} \\ & - w_{i+1,j-1,p} - w_{i-1,j+1,p} + w_{i-1,j-1,p}), \\ & \dots\dots\dots (5.1.21a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_{i,j,p+1} = & 2w_{i,j,p} - w_{i,j,p-1} \\ & + \{2C_L^2/(1+m)\} m x_1^2 \{w_{i+1,j,p} - (1+m)w_{i,j,p} + m w_{i-1,j,p}\} \\ & + \{2C_T^2/(1+n)\} m z_1^2 \{w_{i,j+1,p} - (1+n)w_{i,j,p} + n w_{i,j-1,p}\} \\ & + \{(C_L^2 - C_T^2)/(1+m)(1+n)\} (m x_1 m z_1) (u_{i+1,j+1,p} \end{aligned}$$

$$-u_{i+1,j-1,p} - u_{i-1,j+1,p} + u_{i-1,j-1,p}).$$

$$\dots\dots\dots(5.1.21b)$$

ここに,  $m_{x1} = \Delta t / \Delta x_1$ ,  $m_{z1} = \Delta t / \Delta z_1$ ,  $m = \Delta x_2 / \Delta x_1$ ,  $n = \Delta z_2 / \Delta z_1$ である。

したがって,

図-5.1.8(a) の場合;  $\Delta z_1 = \Delta z_2 = \Delta z$ ,  $\Delta x_1 = \Delta x$ ,  $\Delta x_2 = \Delta x'$ ,

図-5.1.8(b) の場合;  $\Delta z_1 = \Delta z_2 = \Delta z$ ,  $\Delta x_1 = \Delta x'$ ,  $\Delta x_2 = \Delta x$   
である。

一方, スリット側面の自由境界条件の差分表示は以下である。ただし, 時間に無関係に成立するから時間項は省いて示す。

#### (1) 境界ABと境界CD

境界AB:  $3 \leq j \leq n-1$

$$u_{q',j} = m^2 u_{q-1,j} - (m^2 - 1) u_{q,j} \\ - \eta (\Delta x_1 / \Delta z_1) \{m(m+1)/n(n+1)\} \{w_{q,j+1} + (n^2 - 1) w_{q,j} - n^2 w_{q,j-1}\},$$

$$\dots\dots\dots(5.1.22a)$$

$$w_{q',j} = m^2 w_{q-1,j} - (m^2 - 1) w_{q,j} \\ - (\Delta x_1 / \Delta z_1) \{m(m+1)/n(n+1)\} \{u_{q,j+1} + (n^2 - 1) u_{q,j} - n^2 u_{q,j-1}\}.$$

$$\dots\dots\dots(5.1.22b)$$

境界CD:  $3 \leq j \leq n-1$

$$u_{r',j} = (1/m^2) u_{q+2,j} + \{(m^2 - 1)/m^2\} u_{q+1,j} \\ + \eta (\Delta x_1 / \Delta z_1) \{(m+1)/mn(n+1)\} \{w_{q+1,j+1} + (n^2 - 1) w_{q+1,j} \\ - n^2 w_{q+1,j-1}\},$$

$$\dots\dots\dots(5.1.22c)$$

$$w_{r',j} = (1/m^2) w_{q+2,j} + \{(m^2 - 1)/m^2\} w_{q+1,j} \\ + (\Delta x_1 / \Delta z_1) \{(m+1)/mn(n+1)\} \{u_{q+1,j+1} + (n^2 - 1) u_{q+1,j} \\ - n^2 u_{q+1,j-1}\}.$$

$$\dots\dots\dots(5.1.22d)$$

#### (2) 境界BC

図-5.1.8(a)の点B':

$$u_{q',n-1} = (1/n^2) u_{E'} + \{(n^2 - 1)/n^2\} u_{B'} \\ + (\Delta z_1 / \Delta x_1) \{(n+1)/mn(m+1)\} \{w_{q+1,n} + (m^2 - 1) w_{B'} - m^2 w_{q,n}\},$$

$$\dots\dots\dots(5.1.23a)$$

$$w_{q',n-1} = (1/n^2) w_{E'} + \{(n^2 - 1)/n^2\} w_{B'} \\ + \eta (\Delta z_1 / \Delta x_1) \{(n+1)/mn(m+1)\} \{u_{q+1,n} + (m^2 - 1) w_{B'} - m^2 w_{q,n}\}.$$

$$\dots\dots\dots(5.1.23b)$$

図-5.1.8(b)の点C':

$$u_{r',n-1} = (1/n^2) u_{F'} + \{(n^2 - 1)/n^2\} u_{C'} \\ + (\Delta z_1 / \Delta x_1) \{(n+1)/mn(m+1)\} \{w_{q+1,n} + (m^2 - 1) w_{C'} - m^2 w_{q,n}\},$$

$$\dots\dots\dots(5.1.24a)$$

$$w_{r', n-1} = (1/n^2) w_{F'} + \{(n^2 - 1)/n^2\} w_{C'} + \eta (\Delta z_1 / \Delta x_1) \{(n+1)/mn(m+1)\} \{u_{q+1, n} + (m^2 - 1) w_{C'} - m^2 w_{q, n}\} \dots (5.1.24b)$$

#### 4) 非反射境界の差分表示

本解析では非反射境界はすべて  $z$  軸に平行に設定している。また、非反射境界が自由境界など pseudonode を持つ境界に達する場合は、その pseudonode を含めて非反射境界とした。

式(5.1.7) および式(5.1.8) で示された非反射境界の条件は、それぞれ以下のように差分表示される。ただし、時間格子項を省いて示す。

(1) 非反射境界が領域の左端で  $i = q$  にあるとき。

境界-A:

$$u_{q, j}^A = 0, \dots (5.1.25a)$$

$$u_{q-1, j}^A = -u_{q+1, j}^A, \dots (5.1.25b)$$

$$w_{q-1, j}^A = w_{q+1, j}^A. \dots (5.1.25c)$$

境界-B:

$$w_{q, j}^B = 0, \dots (5.1.26a)$$

$$u_{q-1, j}^B = u_{q+1, j}^B, \dots (5.1.26b)$$

$$w_{q-1, j}^B = -w_{q+1, j}^B. \dots (5.1.26c)$$

上式から、境界-Aの条件は非反射境界を対称軸とする対称変位の条件であり、境界-Bの条件は非反射境界を軸とする逆対称変位の条件であることが分かる。

(2) 非反射境界が領域の右端で  $i = r$  にあるとき。

この場合は (1) で示した式(5.1.25)において、 $q-1$  および  $q+1$  の代わりに、それぞれ  $r+1$  および  $r-1$  とすればよい。

#### 5) 逆対称条件による非反射境界

本解析のように  $SV$  波入射のみを対象にする場合には、入射波面上の変位方向が予め分かっている。したがって、 $SV$  波が入射する境界を非反射境界にするには、波面に平行な方向に必ず格子点が存在するように分割し、境界を挟んで波面方向の境界外の仮想格子点と内側の格子点とが、境界上の格子点に関して逆対称変位の条件を満足すればよい。

いま、図-5.1.9(a) において、非反射境界上の点  $M(m, n)$  について考えると、この逆対称変位の条件は、

$$(u, w)_{m-1, n+1} = -(u, w)_{m+1, n-1} \dots (5.1.27a)$$

と書ける。ただし、

$$\tan \phi = \Delta z / \Delta x \dots (5.1.27b)$$

でなければならない。



入射SV波に関して非反射境界を得るには当然ながらこの条件は極めて有効であり、他の領域から各種の反射波が到達するまでは非反射境界条件として適用できる。この非反射境界を注目領域から適当な距離に設定すれば、注目領域からの反射波がこの非反射境界に達し、さらにそこでの反射波が注目領域まで到達する時間までは安心して応答を検討できる。単純ではあるが確実であるため本解析においてもこの性質を広く利用した。

また、解析モデルの形によっては解析領域を狭くするために、対称変位の条件も用いた。たとえば、 $x=m$ を通る $z$ 軸に平行な対称軸に関する対称変位の条件は

$$(u, w)_{m-1, j} = (-u, w)_{m+1, j} \quad \dots\dots\dots (5.1.28)$$

である。

## 6) 入力境界の取扱とモデルの形状

5. 1. 2. 4) で述べたように、モデルへの入力の設定した入力境界の格子点に対して、動光弾性実験で得られた入射SV波パルスと等価な変位パルスを与える。このとき、解析精度をよくするために格子間隔をできるだけ小さくすることと、一方で解析格子点数が過大にならないことを考慮して、図-5.1.3, 4 に示されているように、着目領域の形状が表現でき、応答が比較できる範囲で、動光弾性実験で使用した模型より小さく、しかも全体の形状を解析に便利なように変形させたモデルを用いた。特に、スリットを有する解析モデルD5～D7の場合には、スリット近傍のみを解析対象にする目的で領域全体を直角三角形とした。

いま、図-5.1.9(a) に示すような解析モデルの形を考えると、入力境界への入力変位パルス  $u_0(t)$  の与え方によって、以下のような入射SV波面を得ることができる。

(1) 入力境界BCに一樣かつ平行な方向の入力変位ベクトル  $u_0(t)$  を与えるとき、境界BCに平行な平面SV波面。

この方法で入射SV波面を任意角度で得るためには、格子分割を  $\tan \phi = \Delta x / \Delta z$  として、直線入力境界に丁度格子点が配置されるようにする必要がある。

(2) 入力境界BCと角度  $\theta$  をなすように入力変位ベクトル  $u_0(t)$  を与え、同時にBC方向に

$$C_\theta = C_T / \sin \theta \quad \dots\dots\dots (5.1.29a)$$

の速度  $C_\theta$  で移動させるとき、境界BCと  $\theta$  の角度をもつ平面SV波面。

ここに、 $C_T$  はモデルのSV波速度である。(1) は  $\theta = 0$  の場合である。

(2) は走行荷重によるhead wave として平面波を発生させていることになる。この方法により、入力境界と  $\Delta x / \Delta z$  を固定したままモデル内に任意角度のSV波面を得ることができる。

また、(1), (2) の方法ともに図-5.1.9(b) に示すように、入力格子点が入力境界上では $z$ 軸方向に一つおきになる場合もあり、図-5.1.7 の三角形部分の場合と同様に、入力境界から1格子内側の内点を中央差分で求めるために、入力境界の外側に仮想格子点

を設定する必要がある。この仮想格子点の値は

$$(u, w)_{i+1, j} = \{(u, w)_{i+1, j-1} + (u, w)_{i+1, j+1}\} / 2 \quad \dots\dots\dots (5.1.29b)$$

$$(u, w)_{i+1, j+1} = (u, w)_{i, j+1} \quad \dots\dots\dots (5.1.29c)$$

などのように与えた。

## 5. 1. 5. 非均質モデルの差分表示

### 1) 非均質直線境界の差分表示

非均質境界上の値が関係しない格子点の値は、それぞれの媒体の材料性質を用いて差分式(5.1.11)から得られるから、非均質モデルの差分表示が問題となるのは、非均質境界を挟む両媒体にまたがる関係における格子点の取り扱い方である。ここでは Alterman ら<sup>5-10)</sup> が提案した非均質直線境界の処理法を述べる。この処理法の考え方の基は、境界上の格子点についての支配方程式に入ってくる非均質境界の境界条件式(5.1.9) と式(5.1.10)を、常に2次の精度で得ようとするところにある。

図-5.1.10に示すように、 $z$  軸に平行な非均質境界を挟む格子点を考える。境界条件式(5.1.9) で用いたように、以下では左右の媒体をそれぞれ上添え字  $a$ ,  $b$  で区別し、境界上の変位は共通であるから上添え字  $c$  をつける。

いま、両媒体の変位成分を  $x = m$  で Taylor 展開すると、 $z$  座標と時間に無関係に、

$$(u, w)_{m+1} = (u, w)_m + \Delta x (u_x, w_x)_m + \Delta x^2 (u_{xx}, w_{xx})_m / 2 + O(\Delta x^3), \quad \dots\dots\dots (5.1.30a)$$

$$(u, w)_{m-1} = (u, w)_m - \Delta x (u_x, w_x)_m + \Delta x^2 (u_{xx}, w_{xx})_m / 2 + O(\Delta x^3) \quad \dots\dots\dots (5.1.30b)$$

となる。これらから次式が得られる。

$$\Delta x (u_x, w_x)^a_m = (u, w)^c_m - (u, w)^a_{m-1} + \Delta x^2 (u_{xx}, w_{xx})^a_m / 2 + O(\Delta x^3), \quad \dots\dots\dots (5.1.31a)$$

$$\Delta x (u_x, w_x)^b_m = (u, w)^b_{m+1} - (u, w)^c_m - \Delta x^2 (u_{xx}, w_{xx})^b_m / 2 + O(\Delta x^3). \quad \dots\dots\dots (5.1.31b)$$

一方、式(5.1.1) は両媒体に対して

$$u_{xx} = \{u_{tt} - (C_L^2 - C_T^2) w_{xz} - C_T^2 u_{zz}\} / C_L^2 \quad \dots\dots\dots (5.1.32)$$

と書き直せるから、式(5.1.31)に代入し、境界条件式(5.1.9a,b)と式(5.1.10)を考慮して整理すると、支配方程式の境界格子上の  $u$  成分に対する2次の精度の陽型差分式は以下となる。

$$\begin{aligned} u_{m, n, p+1} = & 2u_{m, n, p} - u_{m, n, p-1} \\ & + 2\{m_x^2 / (\rho^a + \rho^b)\} [(\lambda^b + 2\mu^b) u_{m+1, n, p} + (\lambda^a + 2\mu^a) u_{m-1, n, p} \\ & - \{\lambda^a + \lambda^b + 2(\mu^a + \mu^b)\} u_{m, n, p} \\ & + \xi (\lambda^b - \lambda^a) (w_{m, n+1, p} - w_{m, n-1, p}) / 2] \end{aligned}$$

$$+ \{m_z^2 (\mu^a + \mu^b) / (\rho^a + \rho^b)\} (u_{m,n+1,p} - 2u_{m,n,p} + u_{m,n-1,p}) \\ + \Delta t^2 H^{ab} / (\rho^a + \rho^b). \quad \dots\dots\dots (5.1.33a)$$

ここに,  $\xi = \Delta x / \Delta z$ ,

$$H^{ab} = (\lambda^a + \mu^a) w_{xz}^a + (\lambda^b + \mu^b) w_{xz}^b \quad \dots\dots\dots (5.1.33b)$$

である。

w成分についても, 式(5.1.10)の代わりに式(5.1.9d)を考慮する以外は同様にして次式が導かれる。

$$w_{m,n,p+1} = 2w_{m,n,p} - w_{m,n,p-1} \\ + 2\{m_x^2 / (\rho^a + \rho^b)\} [\mu^b w_{m+1,n,p} + \mu^a w_{m-1,n,p} \\ + (\mu^a + \mu^b) w_{m,n,p} + \xi (\mu^b - \mu^a) (u_{m,n+1,p} - u_{m,n-1,p}) / 2] \\ + [m_z^2 \{ \lambda^a + \lambda^b + 2(\mu^a + \mu^b) \} / (\rho^a + \rho^b)] (w_{m,n+1,p} \\ - 2w_{m,n,p} + w_{m,n-1,p}) + \Delta t^2 G^{ab} / (\rho^a + \rho^b). \\ \dots\dots\dots (5.1.34a)$$

ここに,

$$G^{ab} = (\lambda^a + \mu^a) u_{xz}^a + (\lambda^b + \mu^b) u_{xz}^b \quad \dots\dots\dots (5.1.34b)$$

である。

$H^{ab}$ と $G^{ab}$ の差分表示はそれぞれ二種類あり以下のように表わせる。

$$H^a = [\{ \lambda^a + \mu^a + (\mu^a / \mu^b) (\lambda^b + \mu^b) \} / 2\Delta x \Delta z] (w_{m,n+1,p} - w_{m,n-1,p} \\ + w_{m-1,n+1,p} + w_{m-1,n-1,p}) \\ + \{ (\lambda^b + \mu^b) (\mu^a - \mu^b) / 2\mu^b \Delta z^2 \} (u_{m,n+1,p} - 2u_{m,n,p} + u_{m,n-1,p}), \\ \dots\dots\dots (5.1.35a)$$

$$H^b = [\{ \lambda^b + \mu^b + (\mu^b / \mu^a) (\lambda^a + \mu^a) \} / 2\Delta x \Delta z] (w_{m+1,n+1,p} - w_{m+1,n-1,p} \\ - w_{m,n+1,p} + w_{m,n-1,p}) \\ + \{ (\lambda^a + \mu^a) (\mu^b - \mu^a) / 2\mu^a \Delta z^2 \} (u_{m,n+1,p} - 2u_{m,n,p} + u_{m,n-1,p}), \\ \dots\dots\dots (5.1.35b)$$

$$G^a = [\{ \lambda^a + \mu^a + (\lambda^a + 2\mu^a) (\lambda^b + \mu^b) / (\lambda^b + 2\mu^b) \} / 2\Delta x \Delta z] (u_{m,n+1,p} \\ - u_{m,n-1,p} - u_{m-1,n+1,p} + u_{m-1,n-1,p}) \\ + \{ (\lambda^b + \mu^b) (\lambda^a - \lambda^b) / 2(\lambda^b + 2\mu^b) \Delta z^2 \} (w_{m,n+1,p} - 2w_{m,n,p} \\ + w_{m,n-1,p}), \quad \dots\dots\dots (5.1.35c)$$

$$G^b = [\{ \lambda^b + \mu^b + (\lambda^a + \mu^a) (\lambda^b + 2\mu^b) / (\lambda^a + 2\mu^a) \} / 2\Delta x \Delta z] (u_{m+1,n+1,p} \\ - u_{m+1,n-1,p} - u_{m,n+1,p} + u_{m,n-1,p}) \\ + \{ (\lambda^a + \mu^a) (\lambda^b - \lambda^a) / 2(\lambda^a + 2\mu^a) \Delta z^2 \} (w_{m,n+1,p} - 2w_{m,n,p} \\ + w_{m,n-1,p}). \quad \dots\dots\dots (5.1.35d)$$

$H^a$ ,  $G^a$ は媒体b内の格子点の変位成分を含まず,  $H^b$ ,  $G^b$ は媒体a内の格子点の変位成分をを含まないから, 与えられた問題に対して都合のよい方を選ぶことができる。

なお, x軸に平行な非均質境界についても上記と同様の手順で得られるから, ここには

示さない。

## 2) 非均質隅角部の差分表示

図-5.1.4 に示したスリット充填モデルの場合には、二つの媒体が直角隅角の境界で隔てられている。このような場合の処理法をやはりAltermanら<sup>5-10)</sup>に従って示す。

図-5.1.11に非均質直角隅角境界近傍の格子分割例を示す。直角隅角点Aでは非均質境界条件式(5.1.9c,d)と式(5.1.10)をそのまま用いることができない。

Altermanらの考え方は、隅角点A(m, n)に接し第2および第4象限を通りx軸と45°をなす面（以下では隅接面と呼ぶ）を考え、点Aにおいて隅接面に対する力の釣合を上記の3式の代わりに用いようとするものである。このとき、 $\Delta x \neq \Delta z$ の場合には隅接面上に格子点がなく、取扱いに不便であるため隅角点Aの周りに新しく $\Delta x$ と $\Delta z$ の小さい方の間隔の正方格子を設定する。新しく設定した格子点の変位は元の格子点の変位から比例配分して得る。

点Aにおける隅接面の力の釣合を考えると、

$$(\sigma_x^a + \sigma_z^a)/2 - \tau_{xz}^a = (\sigma_x^b + \sigma_z^b)/2 - \tau_{xz}^b, \quad \dots\dots\dots(5.1.36a)$$

$$\sigma_z^a - \sigma_x^a = \sigma_z^b - \sigma_x^b \quad \dots\dots\dots(5.1.36b)$$

となる。

式(5.1.36)を変位成分で表現し、2次の精度を保つために $\Delta x$ と $\Delta z$ の小さい方の間隔をhとして、

$$u_x^a(m, n) = (u_{m,n} - u_{m-1,n} + u_{m,n+1} - u_{m-1,n+1})/2h \quad \dots\dots\dots(5.1.37)$$

などの平均操作をすると、

$$u_{m,n} = Q_2 + Q_1/2\{\lambda^a + \lambda^b + 2(\mu^a + \mu^b)\}, \quad \dots\dots\dots(5.1.38a)$$

$$w_{m,n} = Q_2 - Q_1/2\{\lambda^a + \lambda^b + 2(\mu^a + \mu^b)\} \quad \dots\dots\dots(5.1.38b)$$

と表わせる。

ここに、(m, N-1), (m, N+1)点などの値が比例配分により、(m, n-1), (m, n+1)などで表わされたものとして、

$$\begin{aligned} Q_1 = & (\lambda^a + \mu^a)(u_{m-1,n} - u_{m,n+1} + u_{m-1,n+1} + w_{m-1,n} - w_{m,n+1} - w_{m-1,n+1}) \\ & + (\lambda^b + \mu^b)(u_{m+1,n} + u_{m+1,n-1} + u_{m,n-1} + w_{m+1,n} - w_{m,n-1} - w_{m+1,n-1}) \\ & + \mu^a(u_{m,n+1} + u_{m-1,n+1} - u_{m-1,n} + w_{m,n+1} - w_{m-1,n} - w_{m-1,n+1}) \\ & + \mu^b(u_{m,n-1} - u_{m+1,n} + u_{m+1,n-1} + w_{m,n-1} - w_{m+1,n} - w_{m+1,n-1}), \\ & \dots\dots\dots(5.1.39a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_2 = & \{\mu^b/2(\mu^a + \mu^b)\}(w_{m,n-1} - w_{m+1,n} + w_{m+1,n-1} \\ & + u_{m+1,n} + u_{m+1,n-1} - u_{m,n-1}) \\ & + \{\mu^a/2(\mu^a + \mu^b)\}(w_{m,n+1} - w_{m-1,n} + w_{m-1,n+1} \\ & + u_{m-1,n} - u_{m,n+1} + u_{m-1,n+1}) \quad \dots\dots\dots(5.1.39b) \end{aligned}$$

である。

#### 5. 1. 6. 安定性の条件

支配方程式の陽型差分近似式を逐次積分によって解く場合の，空間格子分割長と時間格子分割長に課せられる安定性の条件は，式(5.1.11)に対して

$$C_L^2 \Delta t^2 \{ (1/\Delta x)^2 + (1/\Delta z)^2 \} \leq 1 \quad \dots\dots\dots (5.1.40)$$

で与えられる<sup>5-7, 8, 11)</sup>。

図-5.1.3 および図-5.1.4 に示した格子分割長は勿論この条件を満足している。

## 第5章 第2節 差分法による数値シミュレーション結果と考察

ここでは、第1節で述べた差分解法により、図-5.1.3 および図-5.1.4 に示した解析モデルを解析した結果を、第3章および第4章に示した動光弾性実験による等色線縞模様写真と比較する。等色線縞模様は最大せん断応力の等高線であり、縞次数は最大せん断応力に比例するから、解析においては等色線縞模様をシミュレートするために、等最大せん断応力線図（以下では $\tau_{\max}$ 線図と呼ぶ）を描く。また、モデル内の粒子運動の状態を知るために、格子点の粒子速度ベクトル図（以下では速度図と呼ぶ）を描く。

なお、解析における入射SV波の粒子速度ベクトルの方向は、入射SV波面に平行で入射方向に向かって右方向である。

図中に示した時間は解析上の時間であり、括弧内に対応する等色線縞模様写真の駒の最も近い時間を示す。

以下の考察において、速度ベクトル図から粒子または領域の回転運動を問題にすることがある。このとき以下の定義でそれぞれを示す用語を用いる。

①ある点の粒子に注目して、時間の経過にともなうその粒子のベクトル方向変化から、その粒子がその点の回りで回転運動をすることが明らかなきを、粒子の回転運動と呼ぶ。したがって、その場合は領域が回転するわけではない。

②ある時間における一定領域に注目するとき、その領域内の各粒子のベクトルの方向が、領域内の一点の回りを一周するように変化しているときを、場の回転運動と呼ぶ。したがってこの場合はその領域全体が回転する。

### 5. 2. 1. 均質解析モデルの結果

#### 1) 基準モデルD0の結果

図-5.2.1 は、基準模型 (M1000) に対応するモデルD0の自由境界へ、SV波が $\gamma = 36.4^\circ$  で入射する場合の $\tau_{\max}$ 線図と速度図を示す。この $\tau_{\max}$ 線図は、基準模型をR端衝撃した場合の写真-3.4.1, 3.4.4 の等色線縞模様に対応する。

差分解法で得られた入射SV波パルスの $\tau_{\max}$ の最大値 $\tau_{D0}$ は、図-5.1.2 の入射パルスのピークを $\tau_0$  ( $1\text{kg}/\text{cm}^2$ ) とすると $\tau_{D0} = 0.79\tau_0$  となり、入射パルスの速度ベクトルの最大値 $v_{D0}$ は、ほぼ $v_{D0} = \tau_{D0}/\rho C_T$  となっている。

図-5.2.1 の $\tau_{\max}$ 線図において、入射波が自由境界に達した付近の入射波面とそれによって発生する波面は、対応する等色線縞模様写真の縞模様とよく一致している。自由境界直下の同心円的分布の中心および自由境界の最大応答比 ( $\tau_{\max}/\tau_1$ ) は、それぞれ 1.3および1.14で、写真-3.4.4 の対応する位置の縞次数比にほぼ一致する。

図-5.2.1 の速度図から、入射波の速度ベクトルの方向は波面に平行で進行方向に対して右向きに与えられ、 $\tau_{\max}$ 線図が同心円的模様を形成する部分における速度ベクトルの方

向は、図に向かって左から、右下がり方向→水平右方向→右下がり方向へと、→で示される二つの変曲点を持つことが分かる。応答比が最大となる同心円的模様を中心は第一の変曲点の部分が対応し、自由境界から遠ざかるにつれて変曲点は不明瞭になる。反射波面の後方の表面波1が存在する自由境界上の粒子速度ベクトルはほぼ垂直下方を向いている。入射波が自由境界と交わる部分のベクトルがほぼ水平右向きに示されていることを考慮すると、自由境界上の粒子は第2章で述べた順回転（時計回り方向）運動の一部を行なうことが分かる。

反射SV波面は、 $\tau_{\text{MAX}}$ 線図および等色線縞模様写真からは自由境界付近でしか明瞭でなかったが、速度図の  $110\mu\text{sec}$  のベクトルの方向変化からは自由境界から十分離れた位置まで判定できる。

なお、入射波面の先端部に波面に平行で帯状に左上へ向いて現われているベクトル部分は、逐次積分において立ち上がりの鋭いパルス先端部にしばしば現われる振動成分で実際の応答ではない。

## 2) 直角三角形を持つモデルD2およびD1の結果

①図-5.2.2 に、写真-4.2.18に対応するモデルD2の  $\tau_{\text{MAX}}$ 線図と速度図を示す。図の  $80\mu\text{sec}$  は等色線縞模様写真の  $120\mu\text{sec}$  と  $130\mu\text{sec}$  の中間に相当する。

$\tau_{\text{MAX}}$ 線図の挙動は等色線縞模様写真について述べた縞模様の挙動とほとんど同じである。

SV波の入射角が  $45^\circ$  のとき、自由境界に沿う方向の粒子速度成分は0であり、速度ベクトルは自由境界に垂直でなければならない。速度図の  $100\mu\text{sec}$  および  $120\mu\text{sec}$  の斜边上の入射波の存在する部分ではこのことが満足されている。

②図-5.2.3 (a), (b)に、写真-4.2.20に対応するモデルD1の  $\tau_{\text{MAX}}$ 線図と速度図を示す。図の  $90\mu\text{sec}$  が等色線縞模様写真の  $75\mu\text{sec}$  に相当する。

三角形部分へ入射直前の  $80\mu\text{sec}$  の図には、図-5.2.1 と同様な  $\tau_{\text{MAX}}$ および速度図が示されている。ただし、図-5.1.2 に示したように解析に用いた入射パルスには、ピークより後の部分に振動的な部分がないため、 $\tau_{\text{MAX}}$ 線図の同心円的な部分の形が等色線縞模様の場合とやや異なる。このことは図-5.2.1 でも以後の図にも現われている。したがって、写真では入射波面に平行に並んだ長円状の縞模様の部分が、 $\tau_{\text{MAX}}$ 線図の模様では入射波面に直角方向に長軸を持つ長円のように現われる。

$90\mu\text{sec}$  と  $100\mu\text{sec}$  で、 $\tau_{\text{MAX}}$ 線図で三角形の左斜面の入射波の先端付近に表面波2と呼んだ縞模様に対応する応答比の高い部分があり、速度図ではその位置に反時計回り方向の場の回転運動を示す領域がある。回転の中心は等色線縞模様の暗点の位置に対応している。

$120\mu\text{sec}$  および  $130\mu\text{sec}$  の  $\tau_{\text{MAX}}$ 線図に、等色線縞模様写真では明瞭でなかった二つの三角形部分の間の縞模様が、この間で再び入射SV波が  $\gamma = 36.4^\circ$  で自由境界へ入射するときと同じ縞模様を形成し、それが次の三角形部分へ入射する状態として明らかにされ

ている。

### 3) 直角隅角モデルD3およびD4の結果

①図-5.2.4 は、モデルD3にSV波が垂直上方に入射する場合の、写真-4.2.21に対応する $\tau_{\max}$ 線図と速度図である。ただし、写真とは直角隅角の開角の方向が逆である。図の $46\mu\text{sec}$ が等色線縞模様写真の $130\mu\text{sec}$ に相当する。

ここに示した図の各時間の $\tau_{\max}$ 線図は、先行する表面波と暗線および後続の表面波の縞模様の状態など等色線縞模様の縞模様によく対応している。

$46\mu\text{sec}$ の速度図の入射波面に先行する自由境界を含む領域に、 $\tau_{\max}$ 線図には現われていないが head wave によると考えられる左上を向くベクトルの部分がある。

$58\mu\text{sec}$ の速度図によると、先行する表面波のある自由境界の内部は反時計回り方向の場の回転運動を行い、その回転中心は $\tau_{\max}$ 線図の応答比0.1以下（暗点と同じ）の小さな円形の縞模様の位置にあることが分かる。この位置は上方に伝播するに連れて次第に自由境界から遠ざかる。また、自由境界の粒子もこの表面波の通過によって逆回転（反時計回り方向）の運動をすることが示されている。

後続の表面波が存在する部分の粒子速度ベクトルは自由境界に対して垂直に内部方向を向き、この部分より後方（図では下方）のベクトル方向は前方のそれと逆方向となる。

②図-5.2.5 は、モデルD3の水平自由境界へSV波が $36.4^\circ$ で入射する場合の、写真-4.2.23に対応する $\tau_{\max}$ 線図と速度図である。図の $102\mu\text{sec}$ は写真の $140\mu\text{sec}$ に相当する。

自由境界付近の $\tau_{\max}$ 線図は等色線縞模様とよく一致しているが、内部の暗点の位置はその場合より境界からはなれている。速度図からは、表面波によって①の場合より深い位置に中心を持つ広い領域にわたる場の回転を行ない、隅角上方の自由境界の粒子は反時計回り方向の回転運動をすることが分かる。また、この場合は等色線縞模様および図-4.2.7で述べたように、後続の表面波が発生しないが、速度図でも①に示された自由境界に垂直な方向を持つ粒子速度ベクトルが現われない。

③図-5.2.6 は、モデルD4の水平自由境界へSV波が $36.4^\circ$ で入射する場合の、写真-4.2.27に対応する $\tau_{\max}$ 線図と速度図である。図の $62\mu\text{sec}$ は写真の $150\mu\text{sec}$ に相当する。ただし、写真とは左右が逆である。

$\tau_{\max}$ の模様と等色線縞模様はよく対応している。

図の垂直な自由境界を含む部分の速度図で示されている粒子運動は、ここまでに示したSV波が直接入射しない自由境界の例とかなり異なる。入射SV波面が自由境界と交わる部分では、自由境界にきわめて近い点を中心とする場の回転運動がある。詳細は次のスリットモデルの結果を示すときに述べる。

### 4) スリットモデルD5, D6, D7の結果



①図-5.2.7 は、モデルD5のスリット軸にSV波が平行に入射 ( $\gamma=90^\circ$ ) する場合の、写真-4.2.7 に対応する  $\tau_{\text{MAX}}$ 線図と速度図である。図の34  $\mu\text{sec}$  は写真の75  $\mu\text{sec}$  に相当する。図にはスリット軸に対して逆対称な挙動の右半分のみを示している。

$\tau_{\text{MAX}}$ 線図は等色線縞模様によく一致している。ただし、図には等色線縞模様写真でスリット底へSV波が入射した直後から発生し、入射SV波面に先行する head wave の縞模様に対応する模様がない。

速度図では、図-5.2.4 の場合とほとんど同様に、自由境界にRayleigh 波の縞模様が現われる位置の内部に、反時計回り方向の場の回転運動を示す領域があり、その中心はすでに述べたように暗点を意味する  $\tau_{\text{MAX}}$ 線図の模様の位置にある。この中心は入射波の伝播と共に次第に自由境界から遠ざかる。等色線縞模様写真では丁度この時間に入射P波による自由境界からの反射SV波が到達し、暗点が隠されている。また、その後方では粒子速度ベクトルが自由境界に垂直となる。58  $\mu\text{sec}$  以後には、上記の挙動が等色線縞模様写真についてチョウチョ模様を示し、典型的なRayleigh 波のパターンであることを示した部分の粒子速度ベクトル分布として表わされている。

速度図の46  $\mu\text{sec}$  と58  $\mu\text{sec}$  では、 $\tau_{\text{MAX}}$ 線図には現われていないが head wave を表わすと考えられるまとまった方向 (左上向き) を持つベクトルの領域がある。上記の場の回転領域はこの head wave と入射波面に挟まれた部分にある。

②図-5.2.8 は、モデルD7のスリット側面へSV波が  $\gamma=71.8^\circ$  で入射する場合の、写真-4.2.8 に対応する  $\tau_{\text{MAX}}$ 線図と速度図である。図の72  $\mu\text{sec}$  は写真の75  $\mu\text{sec}$  に相当する。また、写真-4.2.9 に対しても左右が逆で対応し、写真の80  $\mu\text{sec}$  が図の72  $\mu\text{sec}$  に相当する。

96  $\mu\text{sec}$  以後の  $\tau_{\text{MAX}}$ 線図の模様は、入射側のスリット側面 (図の右側面) の表面波の部分が前後に分かれ、先行する表面波の部分は非入射側の側面のそれより先行すること、応答比は非入射側が大きいことなど、写真-4.2.9 に現われている縞模様の挙動をそのまま示している。

速度図によると、スリットの入射側と非入射側の側面ともに自由境界より内側に場の回転領域があり、回転方向は反時計回り方向である。この場合、非入射側は暗線を意味する  $\tau_{\text{MAX}}$ 線図の模様を中心として回転しているが、入射側は入射SV波による  $\tau_{\text{MAX}}$ の大きいところを囲む形であり、非入射側のように完全な場の回転運動でなく、粒子速度ベクトルの方向は領域全体として回転を完結しない (完全に一周しない)。ただし、入射側のスリット側面を先行する表面波の内部寄りにある暗点を中心とする場の回転があると考えられるが、解析に用いた格子間隔では表現し得ないと推定される。スリットの両側面とも速度ベクトルの大きさは先行する表面波後方の自由境界上の方が大きい。

③図-5.2.9 は、モデルD6のスリット側面へSV波が  $\gamma=53.6^\circ$  で入射する場合の、写真-4.2.10に対応する  $\tau_{\text{MAX}}$ 線図と速度図である。図の48  $\mu\text{sec}$  は写真の75  $\mu\text{sec}$  に相当する。また、写真-4.2.11に対しても左右が逆で対応し、写真の95  $\mu\text{sec}$  が図の48  $\mu\text{sec}$  に

相当する。入射側のスリット側面に対しては入射波面に関して左右が逆であるが、3) ③の図-5.2.6の垂直自由境界と入射角が同じ関係にあり、垂直自由境界付近の $\tau_{\text{MAX}}$ 線図の模様に限れば、両図の応答はほぼ同じと考えられる。さらに、非入射側のスリット側面に関しては、図-5.2.5の垂直自由境界と入射角が同じ関係にある。

スリット側面に対するこの入射角では、見かけの速度は $C_{TA}=1.24C_T$ でRayleigh波の速度の約1.3倍である。そのため写真-4.2.11で述べたように、図-5.2.9の $\tau_{\text{MAX}}$ 線図の模様についても、入射側のスリット側面の表面波の部分は入射波面より時間とともに遅れ、非入射側の表面波は入射側のスリット側面の表面波と同じ速度でスリット側面を伝播することが示されている。

72 $\mu\text{sec}$ の速度図には、入射側のスリット側面付近に入射波面に先行するhead waveが明瞭に示されている。図-5.2.9と図-5.2.6の場合は、このhead waveと入射波面の間の表面波部分で②で推定したように、スリット側面に極めて近い位置で場の回転が行なわれている。一方、非入射側の表面波の部分では完全な場の回転を形成している。

写真-4.2.23および図-5.2.5において、非入射側の自由境界には先行する表面波のみで後続の表面波が現われなかったが、写真-4.2.11および図-5.2.9には両表面波が現われており、前者の写真および図においては後続の表面波が発生するに十分な自由境界の距離がなかったためと考えられる。

②と③の速度図を検討した結果、スリットの両側面を同じ速度で伝播し等色線縞模様および $\tau_{\text{MAX}}$ 線図の模様の上からは同じ挙動に見えても、粒子運動の観点からは全く異なる波動挙動であることが分かる。

## 5. 2. 2. 非均質解析モデルの結果

### 1) 二層モデルD10の結果

図-5.2.10は、モデルD10の層境界にSV波が $\gamma=36.4^\circ$ で入射する場合の、写真-4.2.4に対応する $\tau_{\text{MAX}}$ 線図と速度図である。図の50 $\mu\text{sec}$ は写真の125 $\mu\text{sec}$ に相当する。ただし、モデルD10に用いた座標方向のため、図には層境界が垂直に設定されており、図の上方が写真の左に対応する。

$\tau_{\text{MAX}}$ 線図および速度図ともに、透過P波と透過SV波の透過角を測定すると、それらは入射角と層定数に従う理論値(P波の透過角 $\theta_2=36.8^\circ$ ，SV波の透過角 $\gamma_2=18.4^\circ$ )で現われている。速度図から、与えた入射SV波の粒子運動のベクトル方向が波面に平行な右上向きに対して、透過P波のそれは波面に垂直な左下向き、透過SV波のそれは波面に平行な右上向き、反射SV波のそれは反射波面に平行な右下向きであり、透過または反射による位相変化も示されている。

いまの場合、表層への透過SV波の透過係数は図-2.2.3によると0.55であるが、 $\tau_{\text{MAX}}$ 線図からは0.57である。透過P波の透過係数は1/5以下であるので図から読み取れない。

このモデルは、ここで用いた差分解析法の非均質問題への適用性を調べたためのものでもあり、等色線縞模様写真との比較および両図から検討する限り正しく挙動を表現していると考えられる。

## 2) 隅角のある非均質モデルD11の結果

図-5.2.11に、モデルD11に対する $\tau_{\max}$ 線図（上段）と速度図（下段）を示す。

このモデルに対応する動光弾性実験の例はないが、5.1.5.2)で述べた非均質隅角部の処理法について検討するために用いた。

この場合、入射SV波は水平層境界および垂直層境界へ、それぞれ $\gamma=36.4^\circ$  および $\gamma=53.6^\circ$  で入射する。これらの入射角はいずれも隅角外側（鈍角側）のE<sub>p</sub>-Iの臨界角を越えている。

$\tau_{\max}$ 線図の40 $\mu$ secで、水平層境界を挟む両層の挙動は隅角付近を除けば、図-5.2.10の50 $\mu$ secの $\tau_{\max}$ 線図の挙動と同じである。鉛直層境界付近も入射角の違いだけで模様の形としては同様である。鉛直層境界からのP波およびSV波の透過角は、それぞれ $\theta_2=54.3^\circ$  ,  $\gamma_2=25.4^\circ$  である。

40 $\mu$ sec以後では隅角内側のE<sub>p</sub>-II層内へ、52 $\mu$ secの $\tau_{\max}$ 線図および速度図にその波面の位置を記入しているように、ほぼ理論通りの透過角でSV波が入射し、全体としては隅角から見て凹な波面を形成している。隅角内側の透過P波の模様は応答比が小さく（透過SV波の約1/5）明瞭でない。

速度図の52 $\mu$ secには、水平層境界からの透過P波のベクトルは左上を向き、垂直層境界からのそれは右下を向くため、両者が重ね合わされる部分でベクトルの方向が急変し乱れていることが示されている。 $\tau_{\max}$ 線図の模様からはこれらの挙動を伺うことはできない。

水平層境界の下方の反射SV波面の後方には、時計方向回りの場の回転運動をする領域があり、時間とともに左方向に移動しているが、鉛直層境界の右側にはそのような運動は現われない。この原因は、前者の反射SV波面のベクトルは左上向きで、後者の反射SV波面のそれは右下向きであるためか、隅角からの円筒波によるものかここでは判断できない。

$\tau_{\max}$ 線図の64 $\mu$ secでは、水平自由境界と鉛直層境界が交わる付近で、自由境界へSV波が $\gamma=36.4^\circ$  で入射する場合の模様が層境界を右から左へ通過する。また、E<sub>p</sub>-IIの臨界角は $\gamma_c=31.8^\circ$  であり、E<sub>p</sub>-II層への鉛直層境界を透過したSV波の水平自由境界への入射角は64.6 $^\circ$  であるから、水平自由境界に対しては臨界角を越えた挙動となっている。

この時間の速度図には、層境界をまたがる両部分で自由境界上の粒子が反時計回り方向に回転運動する様子が示され、通過前後の粒子の挙動にはあまり差がないように見える。

これら透過波および反射波の挙動から考えて、非均質隅角の応答は妥当な範囲で処理されているものと判断できよう。

### 3) スリット充填モデルD12, D13の結果

図-5.1.4 に示す両モデルは同じ形状であるが、図中に示したようにスリット側面へのSV波の入射角を変えるために、5.1.4.6) に示した方法で入射境界上の入力変位の移動速度を変えている。また、解析領域の形状はモデルD6, D7とほぼ同じであるが、充填部の挙動をできるだけ忠実に表現する目的で、スリット幅方向の中央にも格子点を設けたためスリット幅が4mmとやや広がっている。

#### (1) モデルD12の結果

図-5.2.12に、モデルD12のスリット側面へSV波が $\gamma=53.6^\circ$  で入射する場合の、写真-4.2.16に対応する $\tau_{\max}$ 線図と速度図を示す。図の50 $\mu\text{sec}$  が写真の75 $\mu\text{sec}$  に相当し、図ではスリットが垂直に配置されている。また、繰り返し入力系による写真-4.2.17にも対応し、その場合はスリット軸に対する入射方向が図とは逆となり、図の50 $\mu\text{sec}$  が写真の90 $\mu\text{sec}$  に相当する。モデルD12のスリット上端の形状は後者の写真と同じである。

50 $\mu\text{sec}$  から98 $\mu\text{sec}$  までの $\tau_{\max}$ 線図は、スリット両側面の入射波面の状態および入射が側面の反射SV波面について、写真-4.2.16, 17の縞模様によく対応している。また、122 $\mu\text{sec}$ の $\tau_{\max}$ 線図は、入射SV波面と自由境界とスリットの関係が写真-4.2.17の160 $\mu\text{sec}$ の状態と同じで、等色線縞模様と $\tau_{\max}$ 線図に関してはよく一致している。

スリット充填境界付近の挙動を調べるために、スリットが充填されていない場合の図-5.2.9と比較すると、両者はほぼ同じ時間の第1(50 $\mu\text{sec}$ )から第4(122 $\mu\text{sec}$ )の四つの時刻の状態を示している。

両者の第2と第3の時刻同士を比較すると、入射側のスリット側面の $\tau_{\max}$ 線図の模様は、反射SV波面後方で、充填されないスリットに発生している後続の表面波の位置付近の模様が充填部も含めて同心長円形を形成している。また、この長円の中心は充填されない場合より入射SV波面に近く、境界に沿って入射波面と同じ見かけの速度で伝播している。

非入射側では、図-5.2.12の場合は入射側の波面がそのままの形で延長されている。ただし、その波面に含まれる $\tau_{\max}$ のピーク値は入射側のその約70%である。スリットが充填されていない場合は波動が直接透過しないから当然異なる。

速度図について第2の時刻同士を比較すると、スリットを充填した場合は入射側の入射波面に先行する head wave を示すベクトルが見えない。また、反射SV波面の位置にはほぼ水平右向きのベクトルが存在し、スリットが充填されていない場合と大きく異なる。しかし、非入射側の入射波面の最先端の0.1の $\tau_{\max}$ の等高線だけが、入射側の波面の延長線上になく水平に近い線となっているが、続く0.2の $\tau_{\max}$ の等高線は延長線上にある。この二つの等高線の間は狭く偏平ではあるが場の回転運動を形成している。

図-5.2.9のスリットの場合は、これに対応する領域は表面波の部分で、その場合はもっと広い円形の場の回転運動を行なっている。両者は同じメカニズムで発生していると考え

えられるから、充填されたスリットの場合でも非入射側のスリット側面付近には、スリット底からの円筒波により表面波的な挙動が存在すると推定される。

## (2) モデルD 1 2の結果

図-5.2.13は、モデルD 1 3のスリット側面へSV波が $\gamma = 71.8^\circ$ で入射する場合の、写真-4.2.15に対応する $\tau_{\max}$ 図と速度図である。図の $74\mu\text{sec}$ が写真の $87.5\mu\text{sec}$ に相当する。

この場合も $\tau_{\max}$ 図および速度図ともに(1)とほぼ同じ挙動である。しかし、 $\tau_{\max}$ 図の模様と写真の縞模様を比較すると、 $\tau_{\max}$ 図では、充填されたスリットを挟んで入射側と非入射側の入射波面の角度が異なり、非入射側はやや水平に近くなっており、写真の縞模様と相違している。この傾向はスリットモデルの図-5.2.8の非入射側の波面の状態に近い。

写真の縞模様と異なるこの挙動が、ここで用いた解析法の隅角の処理特性によるものかどうかは明らかでない。

本章で行なった差分法による数値シミュレーションは、緒言で述べたように、動光弾性実験によって得られた等色線縞模様から波動挙動を解明する際に、等最大せん断応力線図を意味する縞模様からだけで判断するのは確実でないと思われる現象があり、それらについて別の観点から補足および確認するためのものである。

そのために、まず動光弾性実験で得られる等色線縞模様を数値解析による等最大せん断応力線図と比較し、次いでその中で表現され得ない応答の一つである粒子運動を、粒子速度ベクトル図によって表わして波動挙動を検討した。

これらにより、ここで行なった差分解析に関しては動光弾性実験の等色線縞模様との比較において、波動挙動について以下のようにまとめられる。

(1) ここで行なった差分解析では、隅角部の応力集中場以外はどのモデルに対する  $\tau_{\max}$  図の模様も、それに対応する等色線縞模様とよく一致している。ただし、第1節で示したように、差分解析において特に凹の自由境界の隅角部は合理的な処理が最も困難で、不自然な処理を行わなければならない部分である。すなわち、波動の伝播方向に無関係に平均しているため、急激な変化があっても鈍化させる方向で処理している。したがって、この部分が関与する挙動に関しては問題があることを留意する必要がある。

(2) 等色線縞模様 ( $\tau_{\max}$  図) からは判断しにくい場合でも、境界および内部の粒子速度ベクトルの方向変化などの挙動から、たとえば反射波の波面、head waveの波面などの方向と位置を判定できる。この粒子運動は、等色線縞模様だけをもとに波動挙動を解明しようとする場合に最も不足している情報であり、正確な判断を行なうために補足したい第1の因子であろう。なお、ここでは粒子速度を用いたが粒子変位を用いても同様である。しかし、粒子速度は特性抵抗の逆数を比例定数として応力に比例することを考えて採用した。

(3) 平面SV波が自由境界へ臨界角を越えて  $\gamma_0 \leq \gamma \leq 45^\circ$  で入射する場合の反射SV波後方の表面波1の粒子は、ここで与えた入射波の速度場に対して順回転の粒子運動をしている。一方、表面波1の縞模様の内部は速度ベクトルの方向が二つの変曲点を持つように変化し、場の回転運動を伴わない。

(4) SV波が自由境界へ  $\gamma \geq 45^\circ$  で入射し、隅角からRayleigh波が発生している場合に、その付近で等色線縞模様 ( $\tau_{\max}$  図) が暗点となる位置は、場の回転運動の中心であることが多い。

(5) スリットの入射側の側面で発生する表面波は、その縞模様の存在する境界の内部に中心を持つ比較的狭い領域の場の回転を伴う。また、この表面波が存在する領域は、head wave 後方の入射波面の先端である。

(6) 非入射側のスリット側面の表面波 (Rayleigh 波) は、その内部に (5) より広い場の回転運動の領域を持つ。このときのRayleigh波を形成する典型的な縞模様の形は、図-4.2.5 で示した形と異なり、境界に沿って縞次数の比較的高い縞模様の背後に円筒S

V波の波面がつながる。隅角または曲線境界を経て負の入射角となる場合の表面波はこの形のRayleigh 波と考えられる。

(7) S V波の入射角が臨界角を越えた入射側のスリット側面の表面波と、非入射側のRayleigh 波とは等色線縞模様 ( $\tau_{\max}$ 図) の形の上では同じであるが、内部を含めた場の回転運動の上からは全く異なっている。

(8) スリット充填モデルの非均質問題に対して、等色線縞模様からはここで用いた程度の特性抵抗比において、非均質境界近傍のみに変化があるように見えるが、粒子速度ベクトルの挙動から判断すると、非入射側では充填していないスリットの場合と同様のメカニズムによる挙動が含まれていることが分かる。

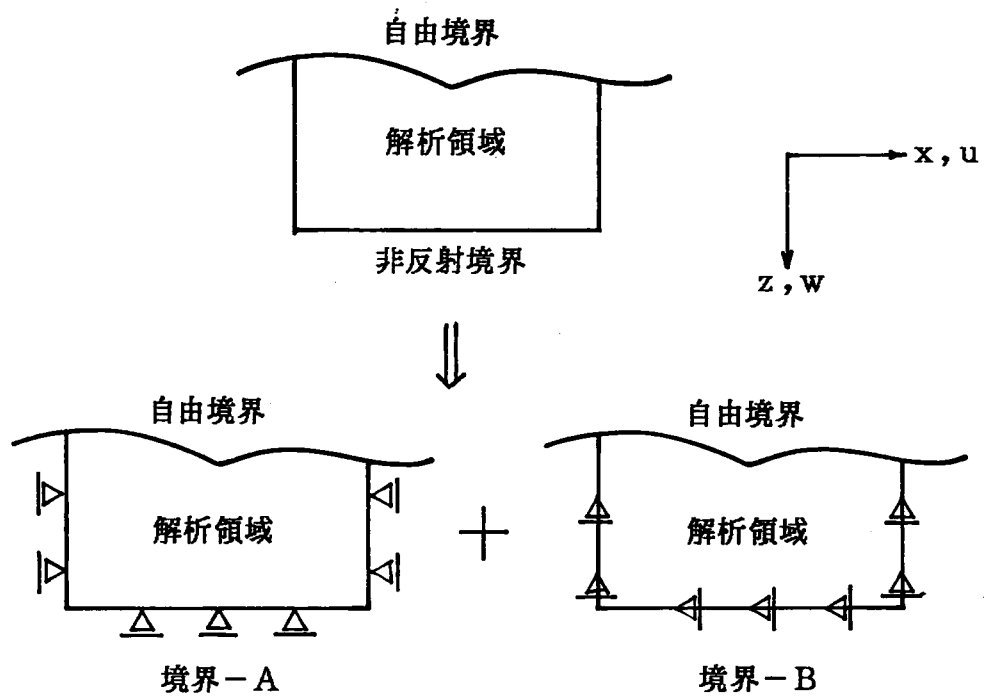


図-5.1.1 非反射境界と境界条件

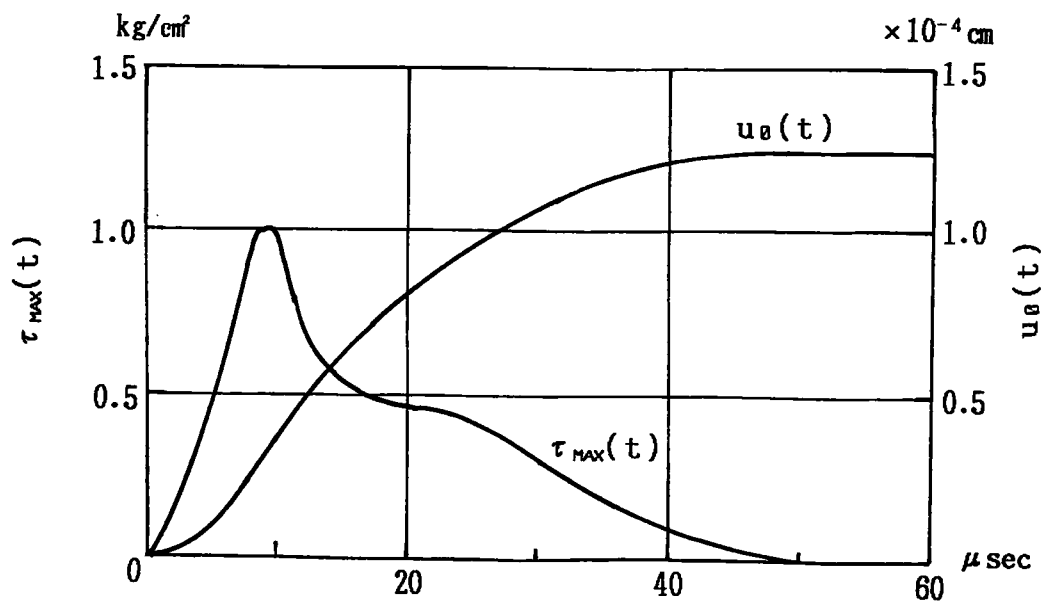


図-5.1.2. 動光弾性実験の入射パルス形  $\tau_{\max}(t)$ と  
差分解析の入射パルス形  $u_0(t)$



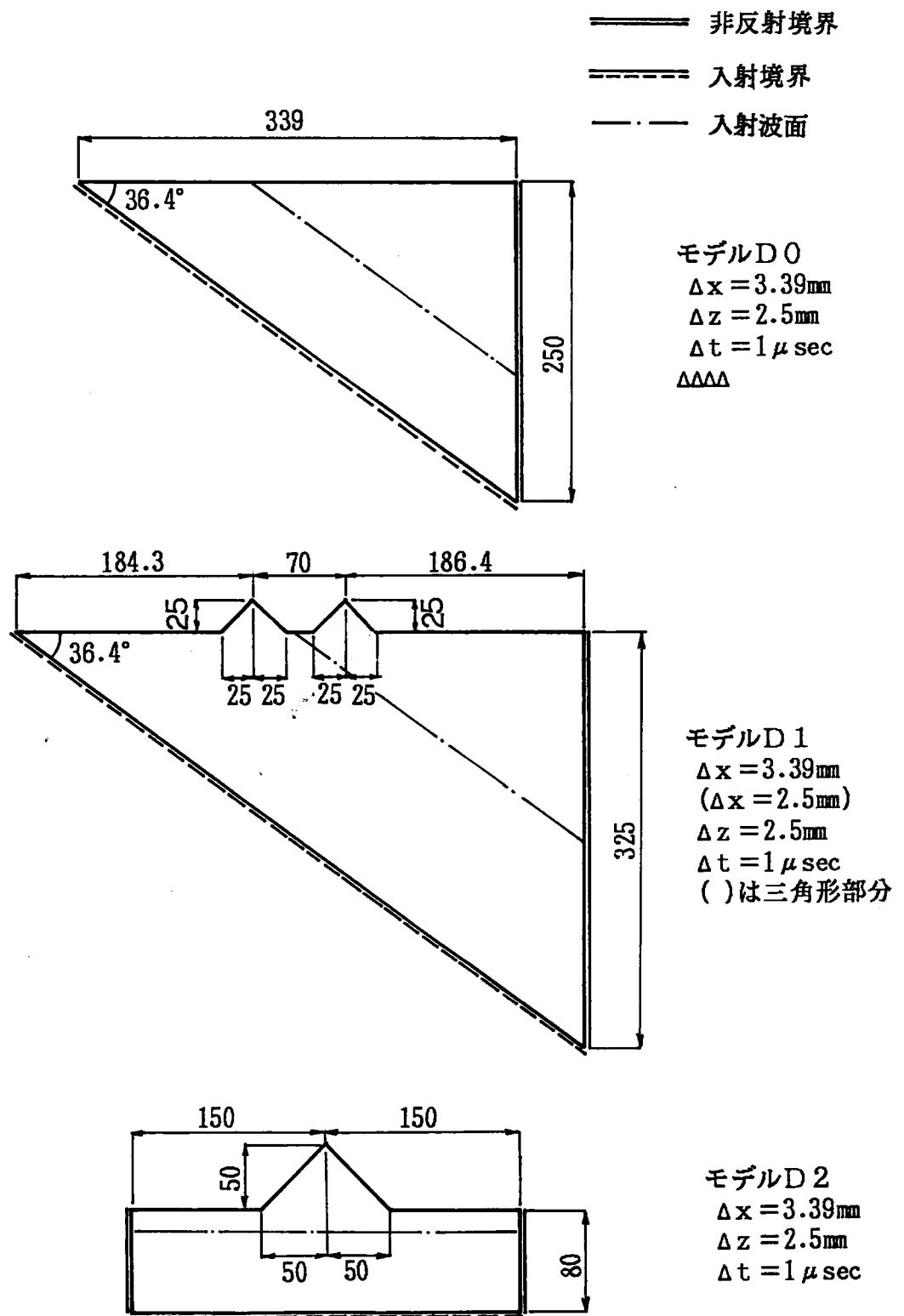


図-5.1.3(a) 均質モデルの形状と寸法 (単位: mm)

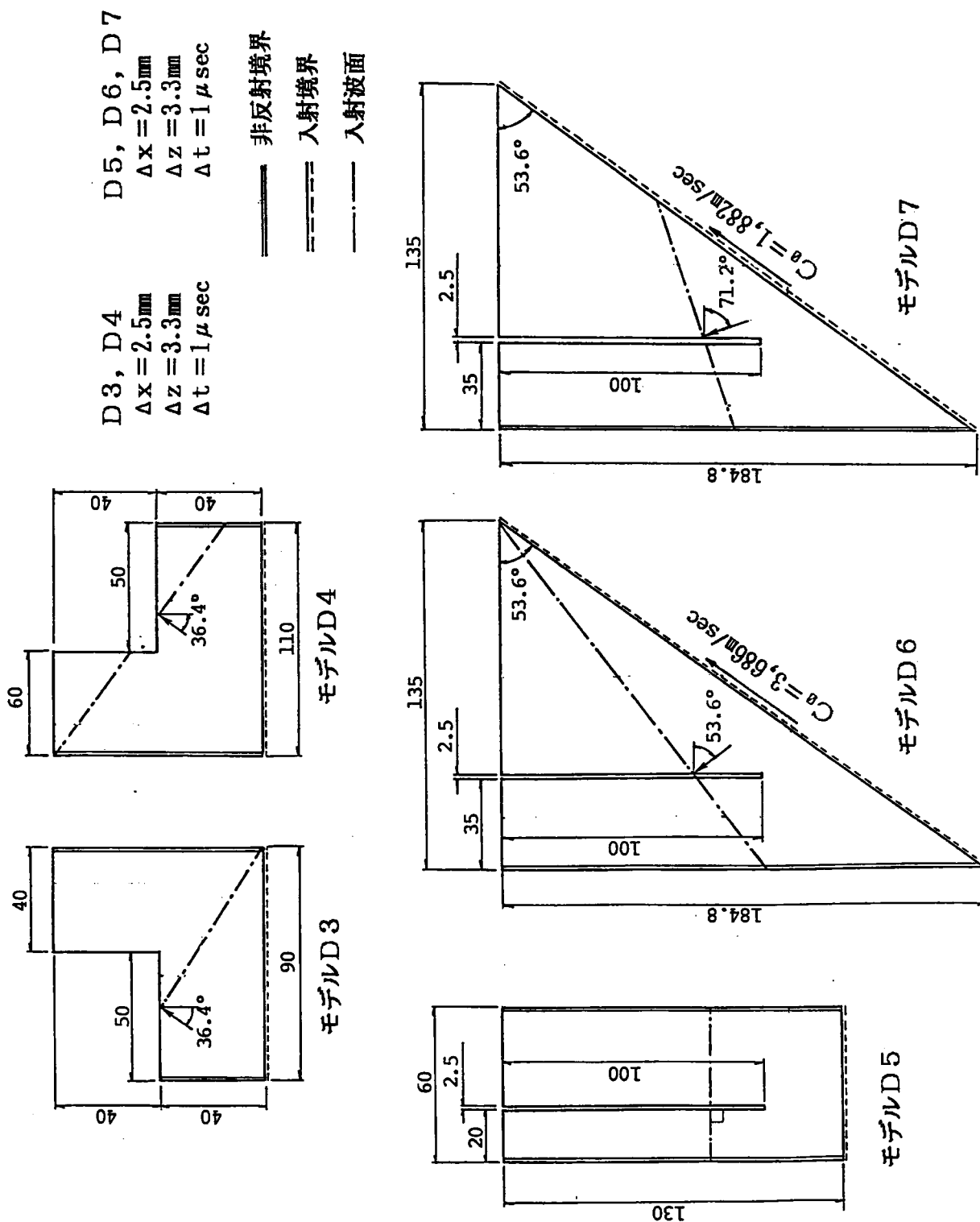
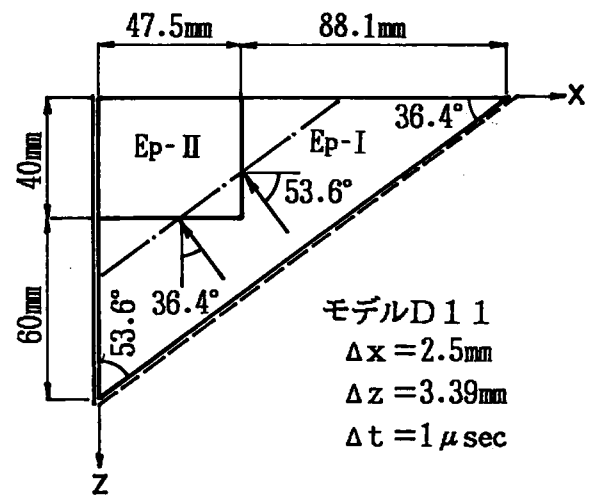
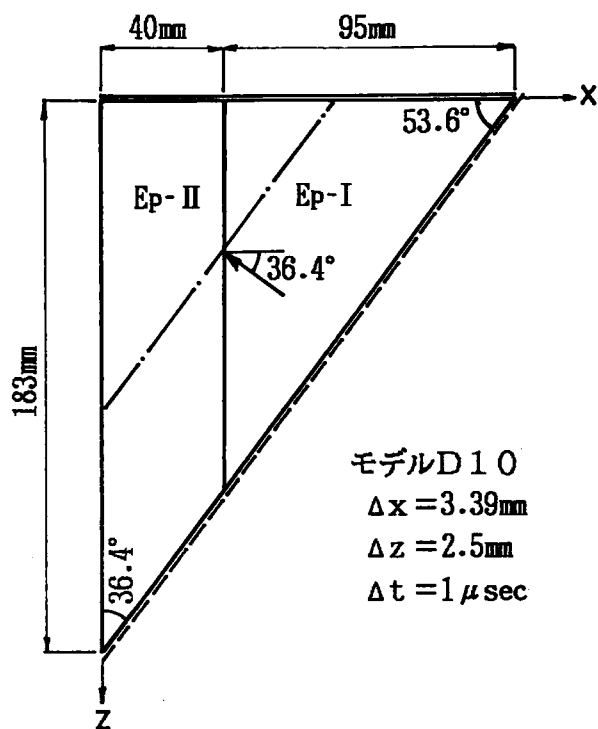


図-5.1.3(b) 均質モデルの形状と寸法 (単位: mm)



——— 非反射境界  
 ——— 入射境界  
 — · — 入射波面

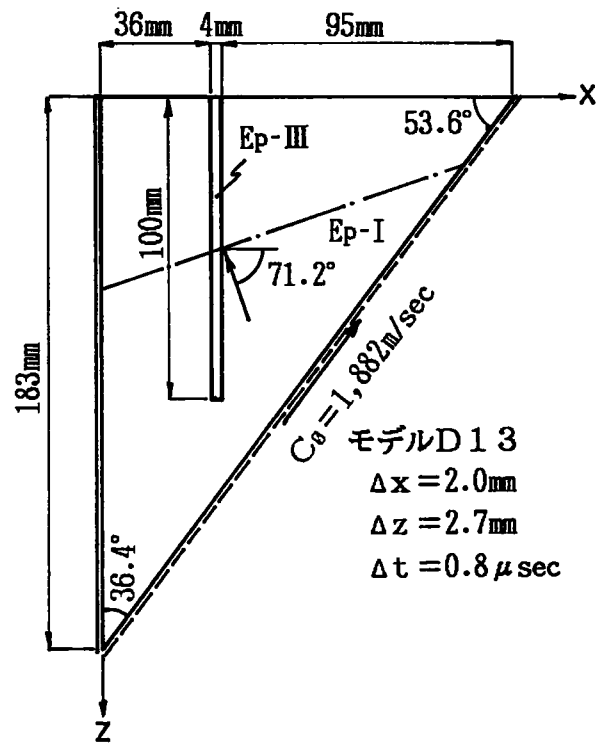
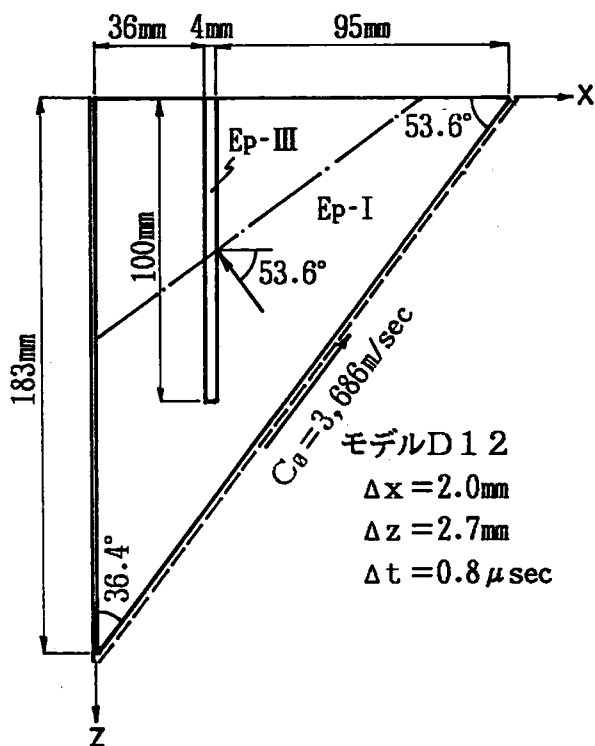


図-5.1.4 非均質モデルの形状と寸法 (単位: mm)

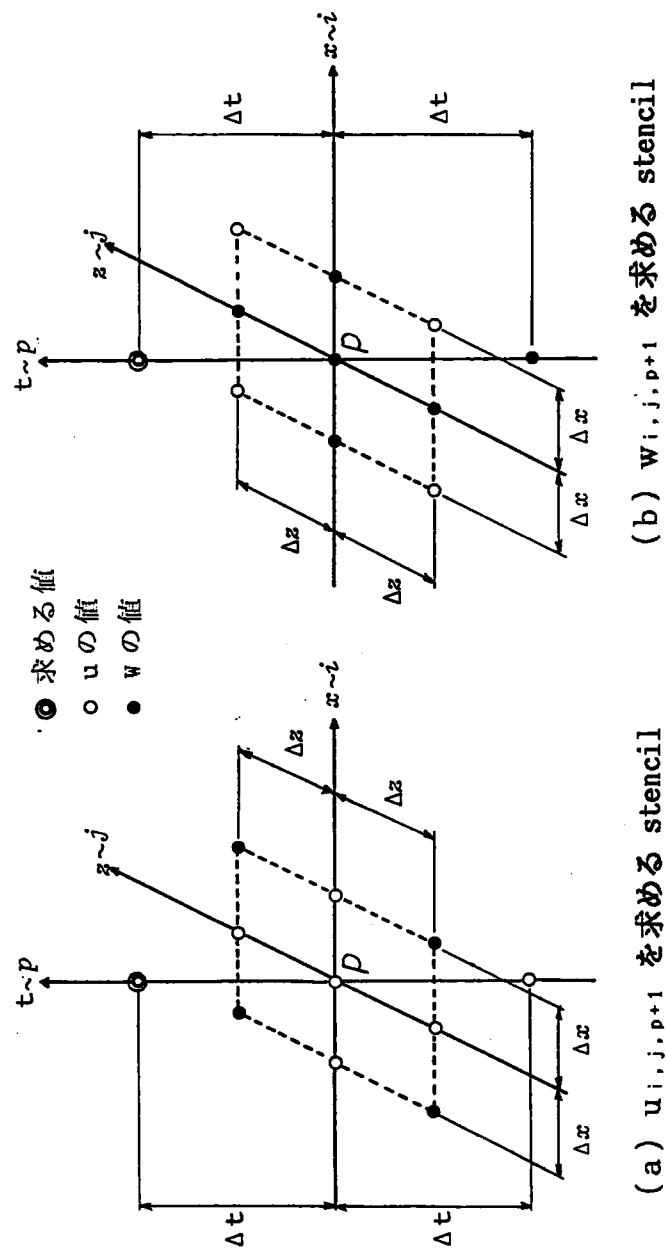


図-5.1.5 支配方程式の calculation stencil

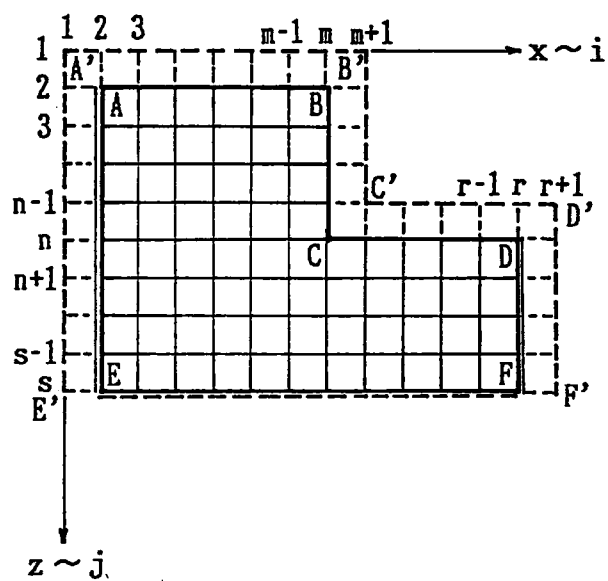


図-5.1.6 格子分割例

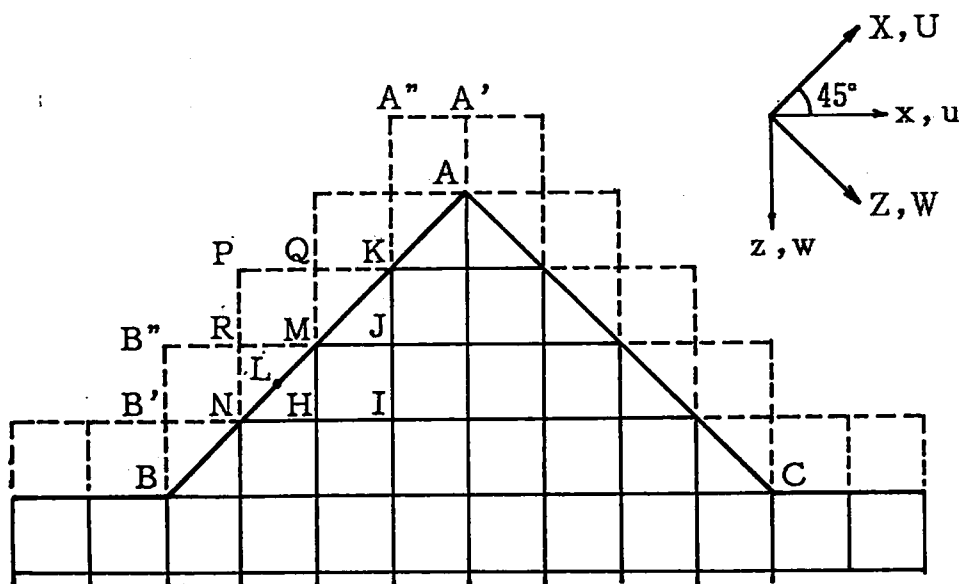


図-5.1.7 三角形部分の格子分割例

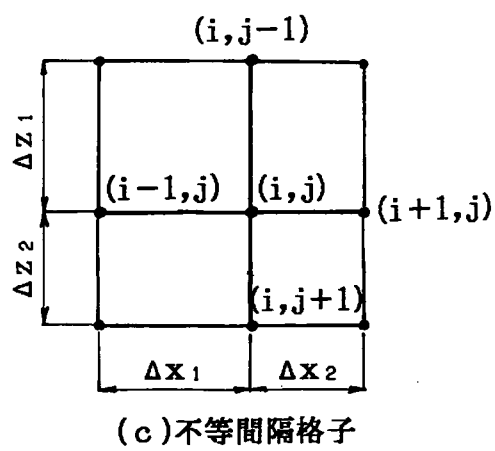
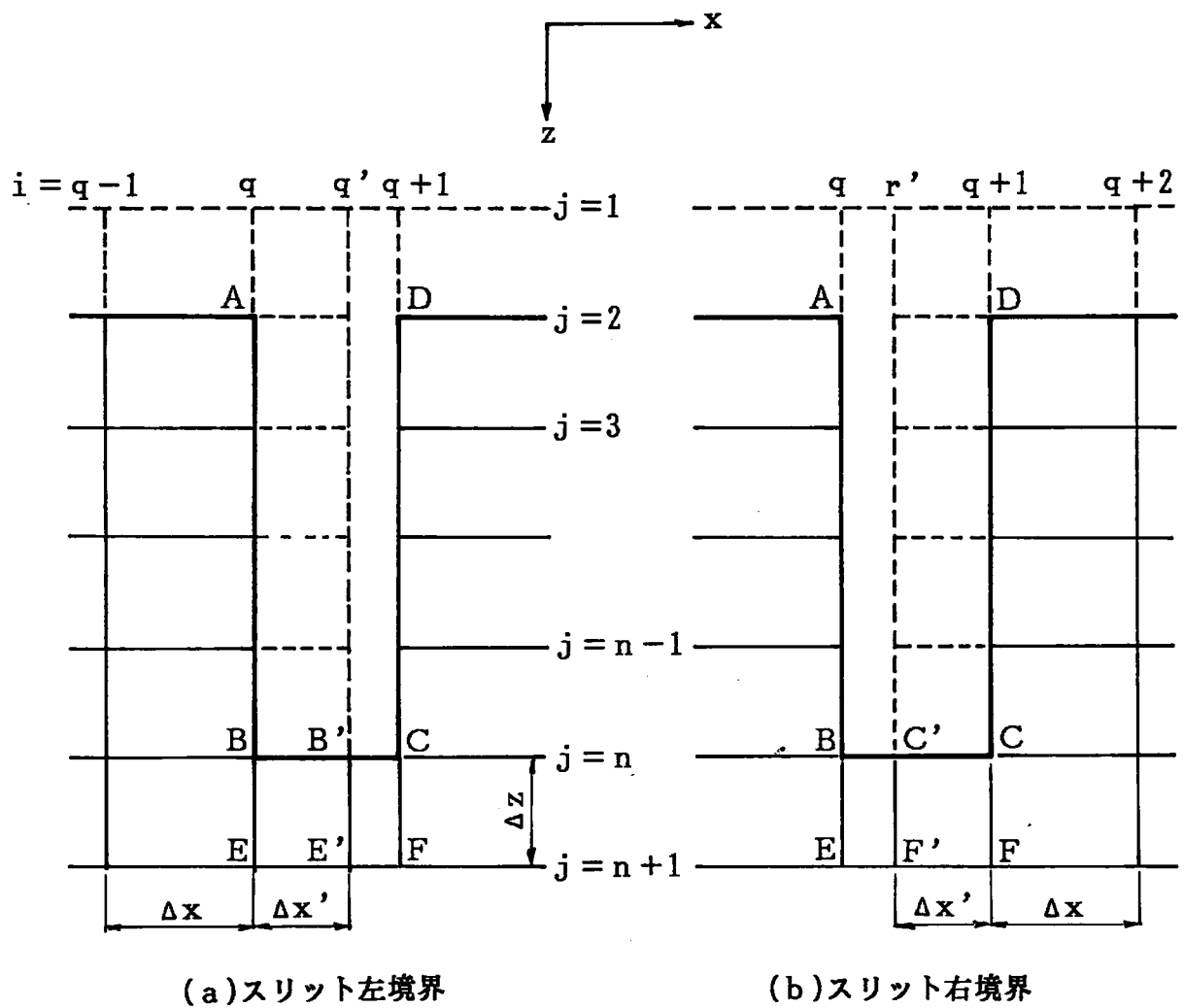
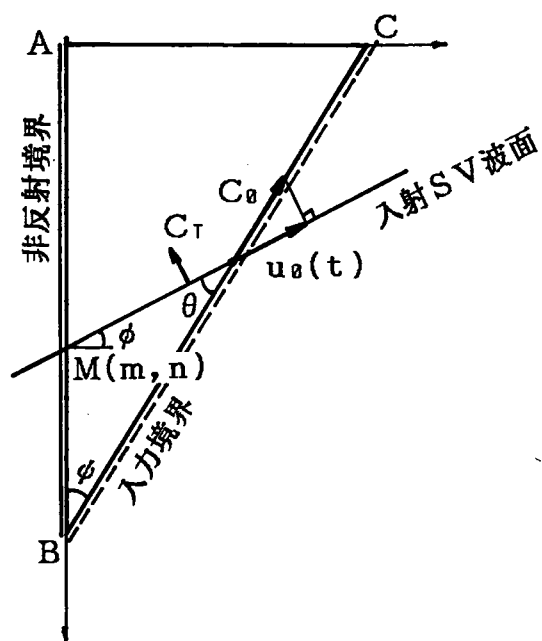
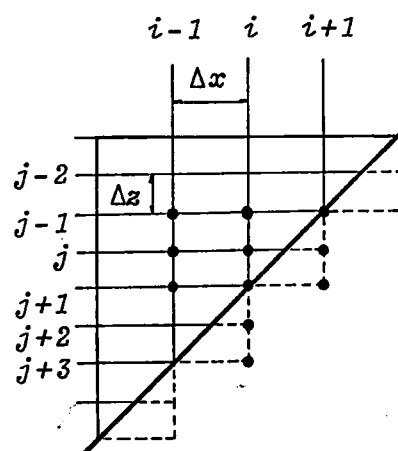


図-5.1.8 スリット部の格子分割例



(a) 入力変位と入射SV波面



(b) 入力格子点

図-5.1.9 入力境界の入力変位と入射SV波面

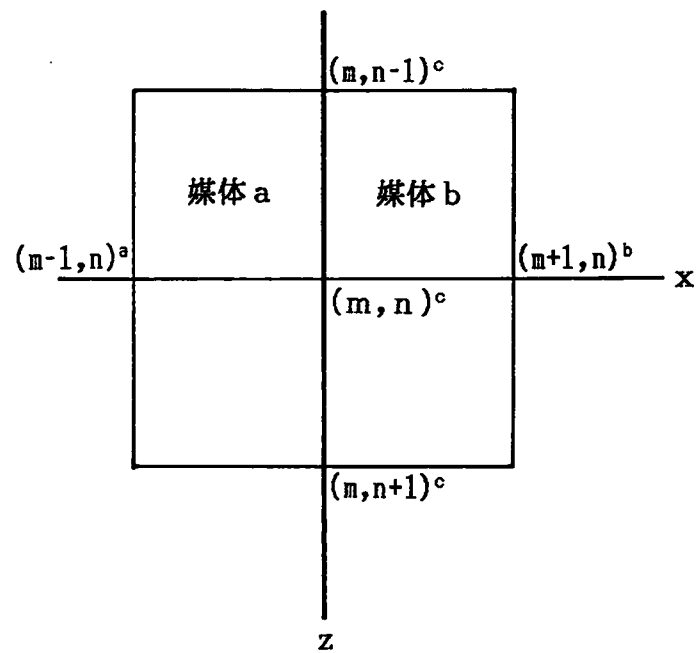


図-5.1.10  $z$  軸に平行な非均質直線境界の格子例

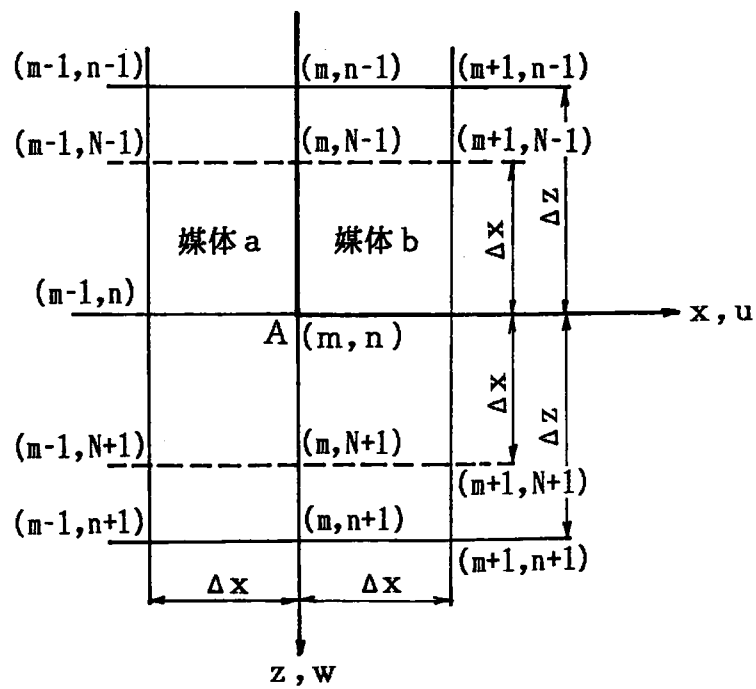


図-5.1.11 非均質隅角点  $A(m, n)$  回りの格子点



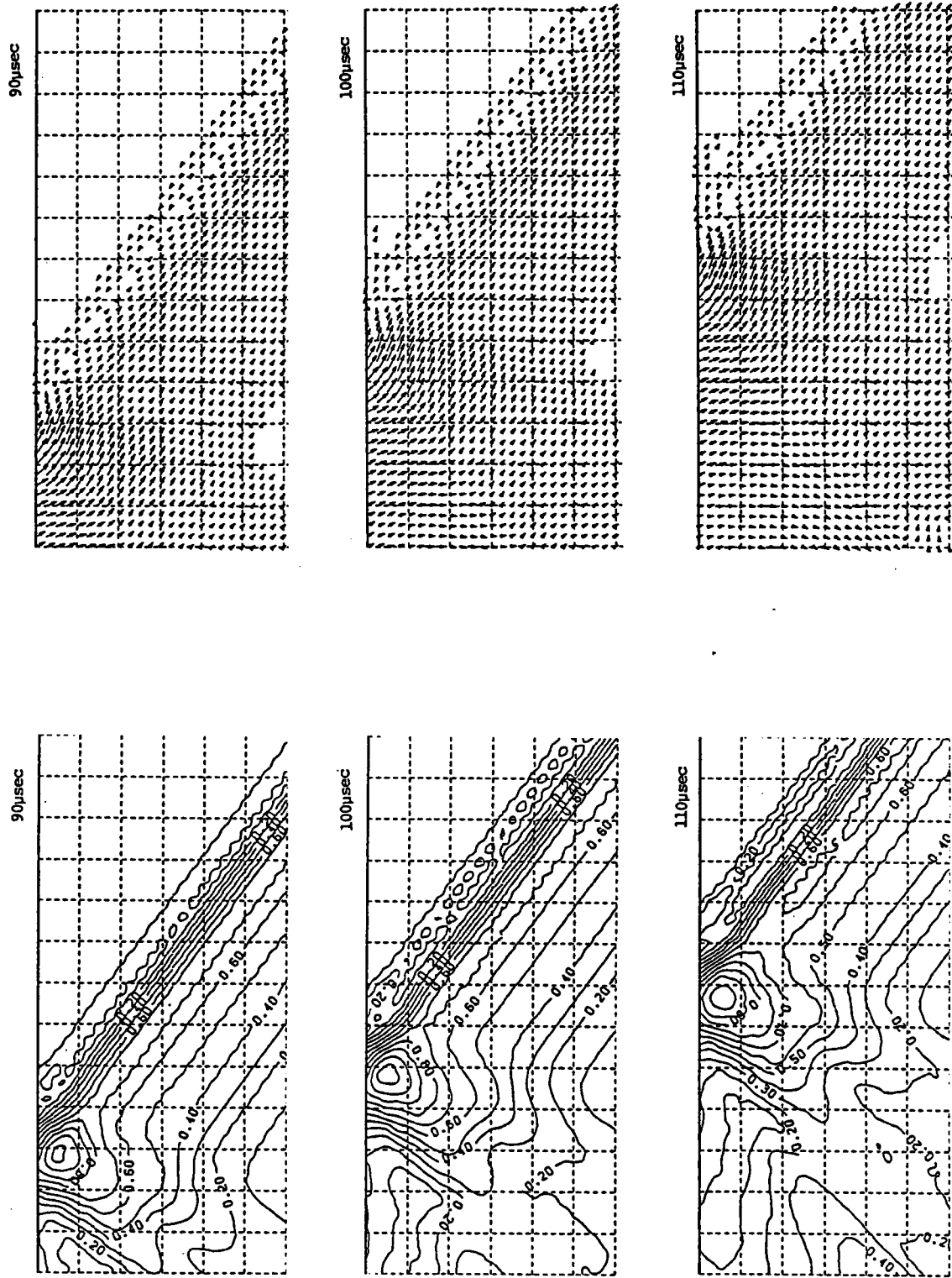


図-5.2.1 モデルD0の等最大せん断応力線図 (左) と粒子速度ベクトル図 (右)

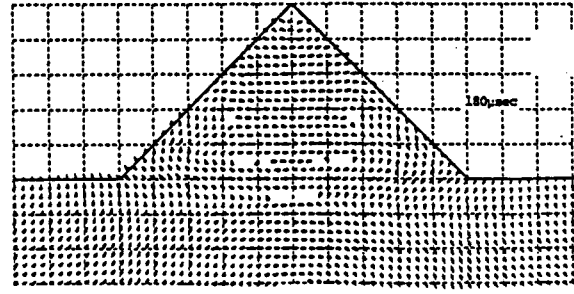
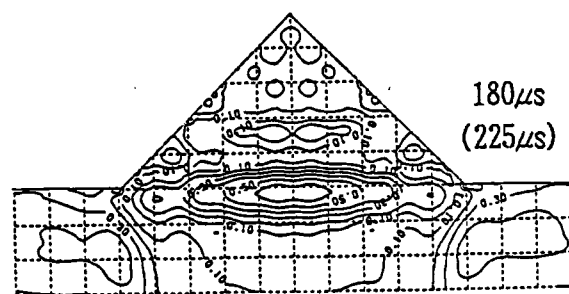
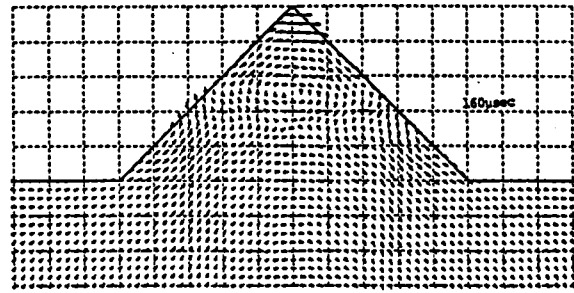
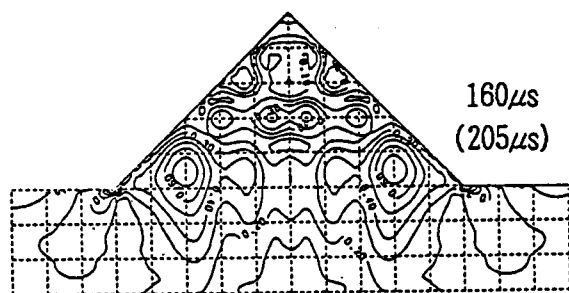
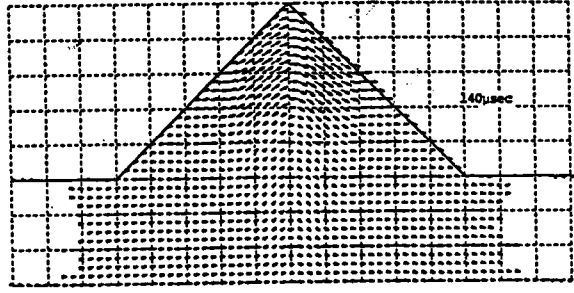
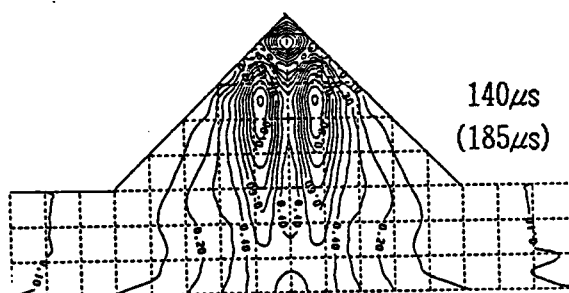
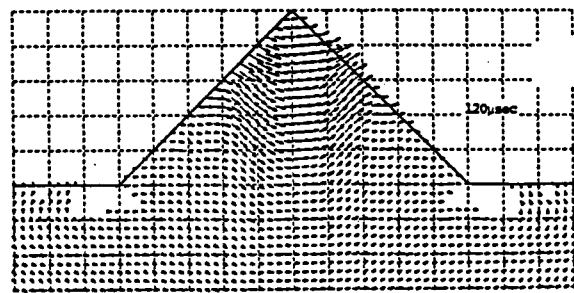
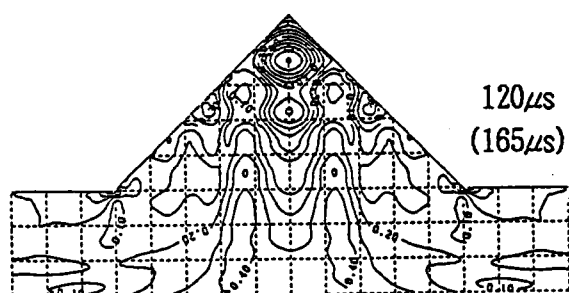
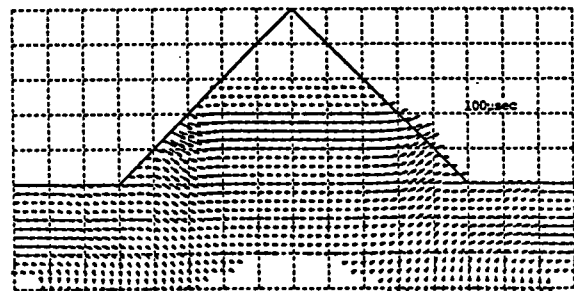
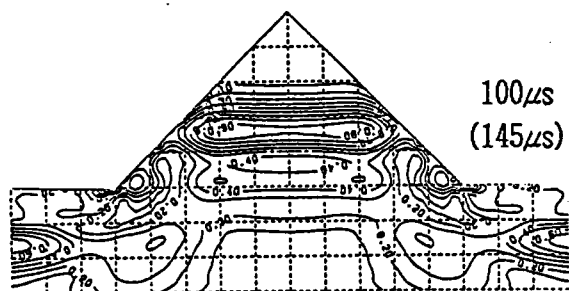
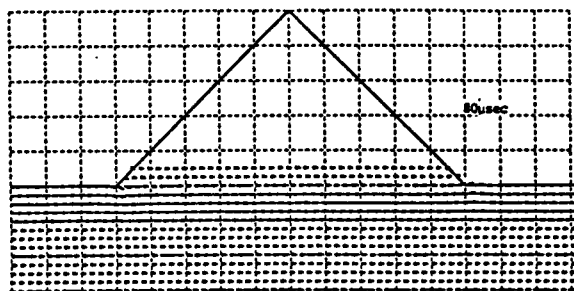
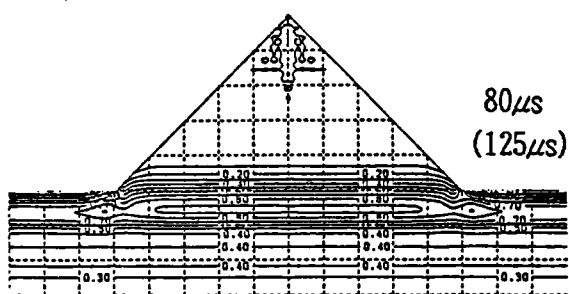


図-5.2.2 モデルD 2の等最大せん断応力線図 (左) と粒子速度ベクトル図 (右)

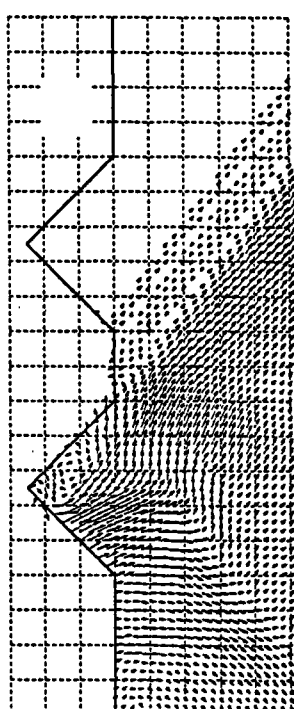
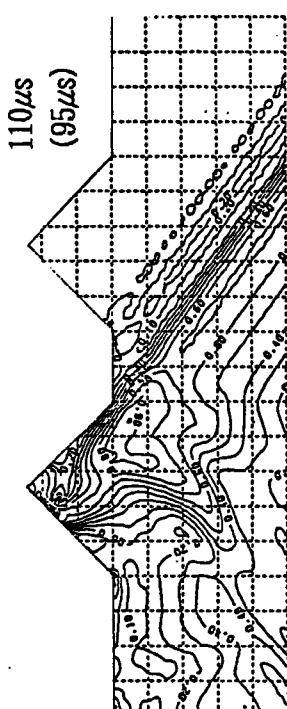
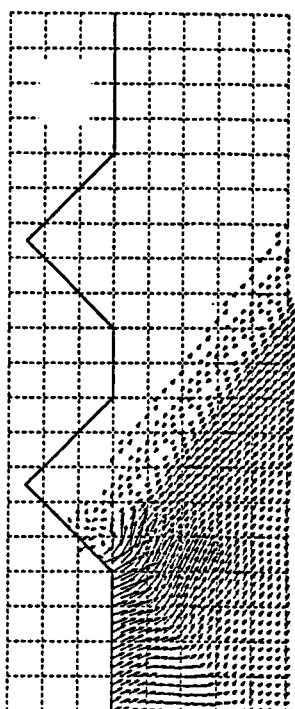
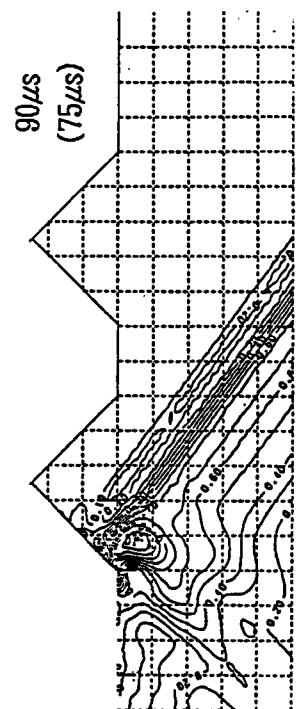
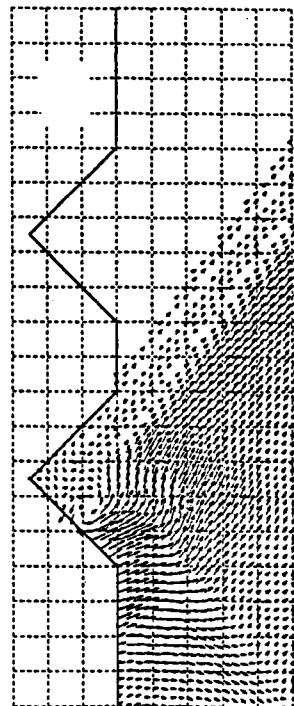
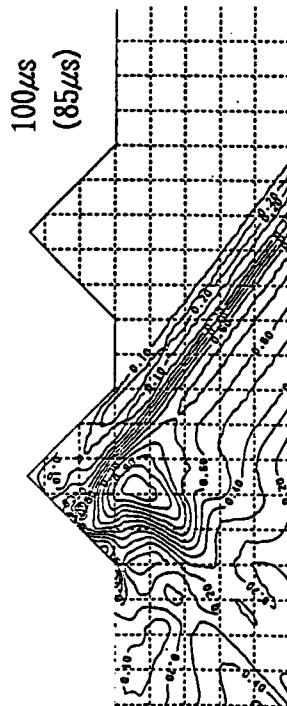
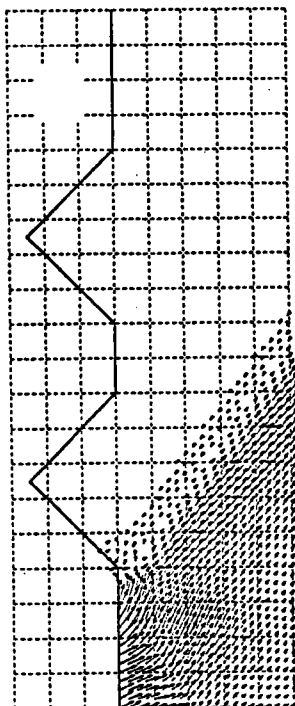
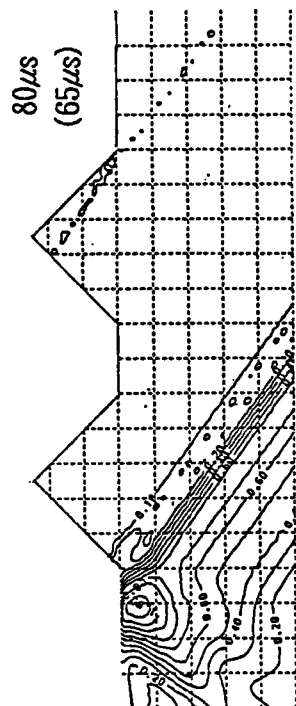


図-5.2.3 (a)モデルD1の等最大せん断応力線図(上)と粒子速度ベクトル図(下)

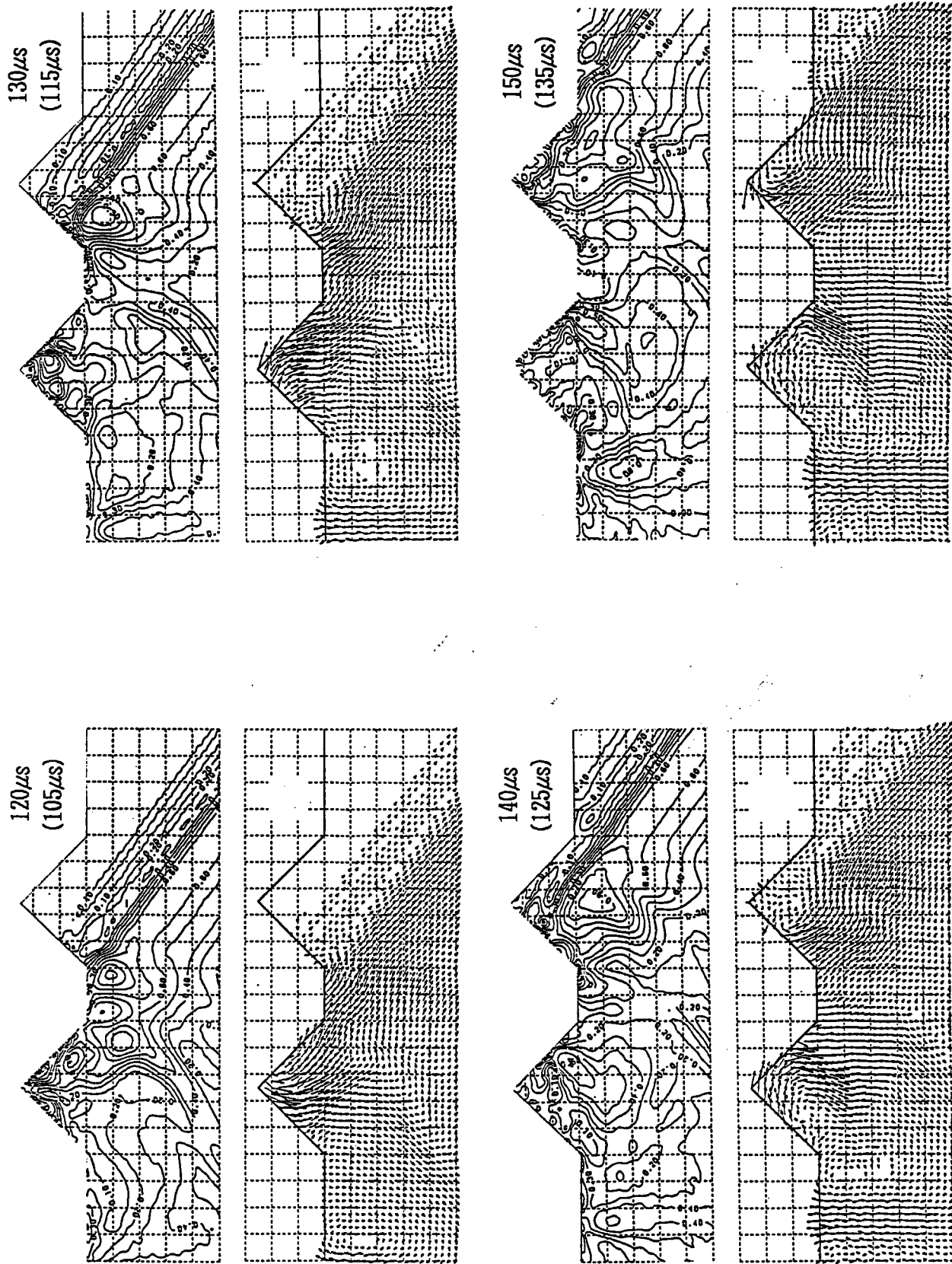
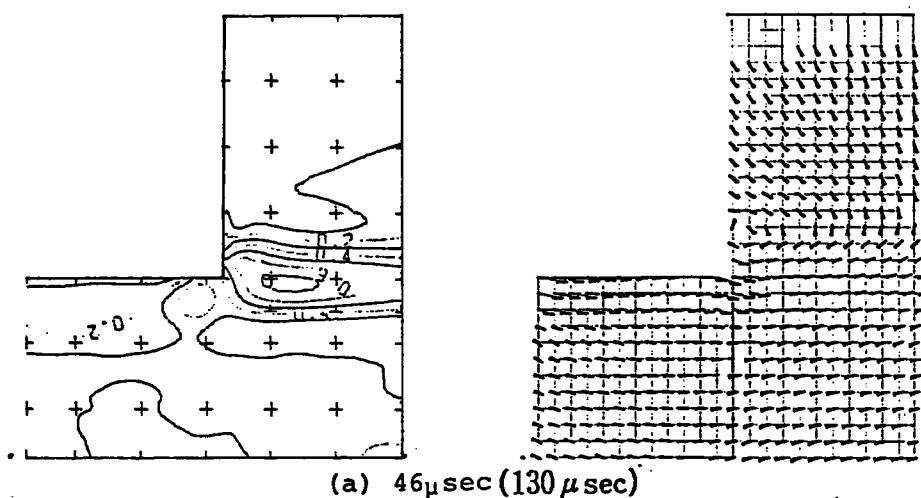
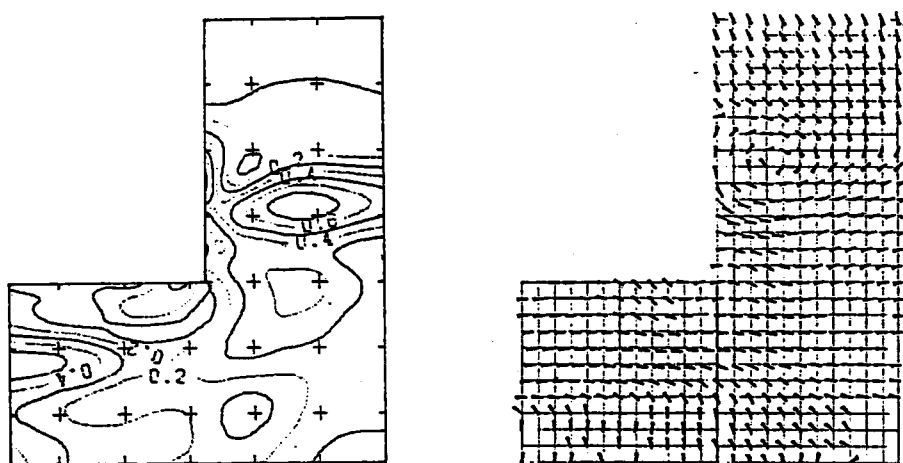


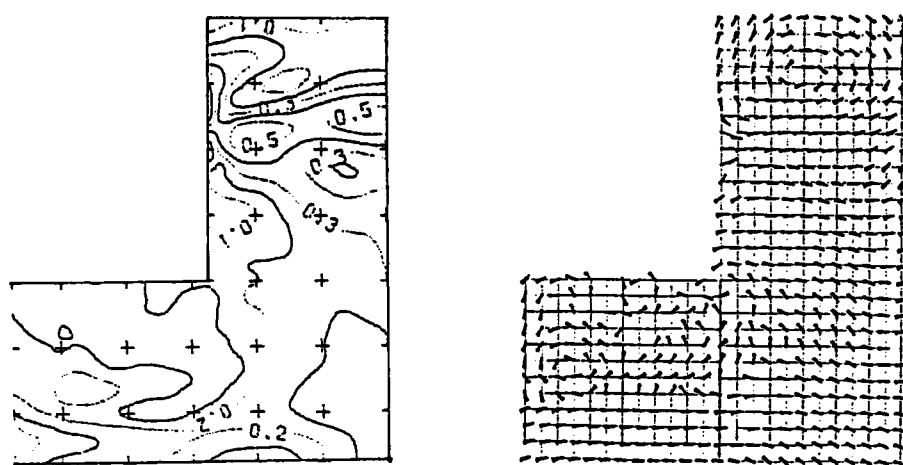
図-5.2.3 (b)モデルD1の等最大せん断応力線図(上)と粒子速度ベクトル図(下)



(a)  $46\mu\text{sec}$  ( $130\mu\text{sec}$ )

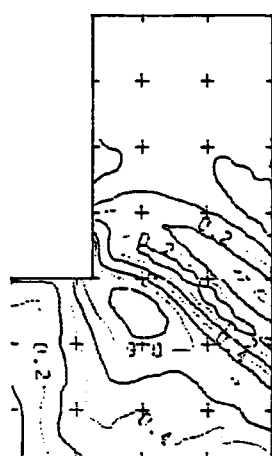


(b)  $58\mu\text{sec}$  ( $140\mu\text{sec}$ )

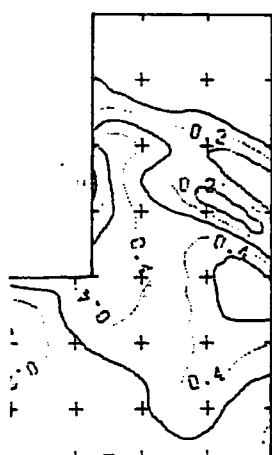
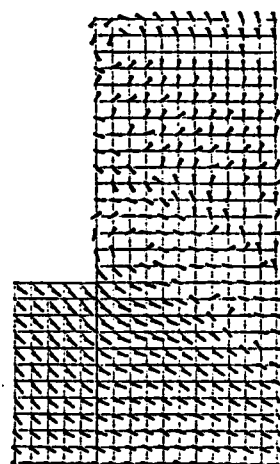


(c)  $70\mu\text{sec}$  ( $155\mu\text{sec}$ )

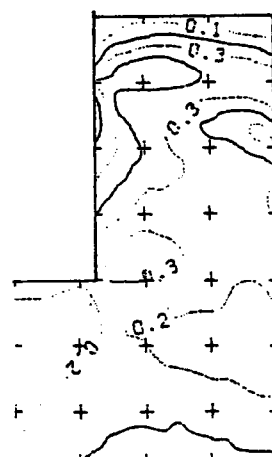
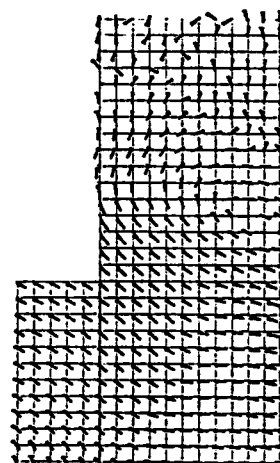
図-5.2.4 モデルD3の等最大せん断応力線図 (左) と粒子速度ベクトル図 (右)  
垂直入射



(a)  $102\mu\text{sec}$   
 $(140\mu\text{sec})$



(b)  $114\mu\text{sec}$   
 $(150\mu\text{sec})$



(c)  $126\mu\text{sec}$   
 $(165\mu\text{sec})$

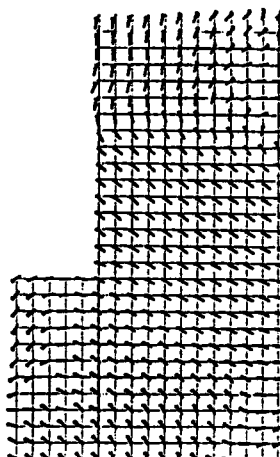
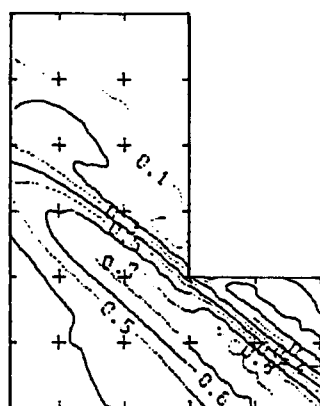
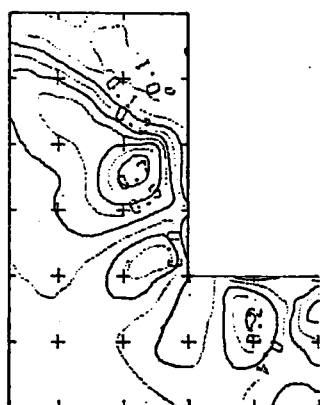
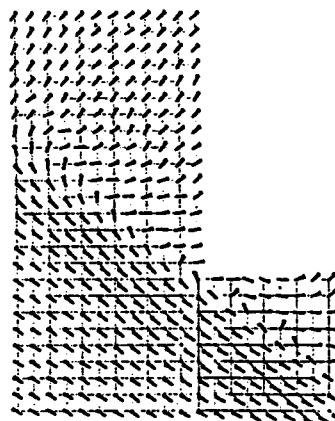


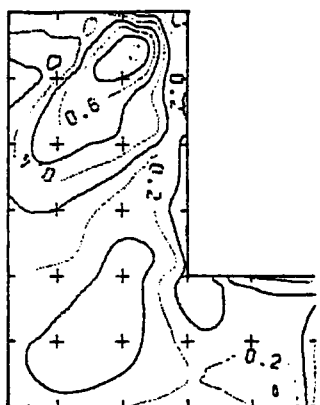
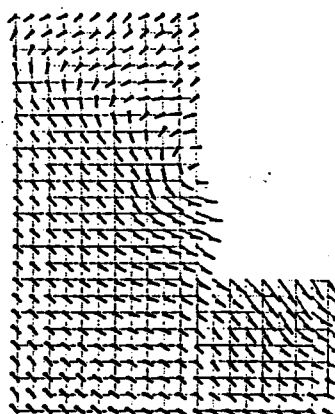
図-5.2.5 モデルD3の等最大せん断応力線図 (左) と粒子速度ベクトル図 (右)  
 $\gamma = 36.4^\circ$



(a) 62 $\mu$ sec  
(150 $\mu$ sec)



(b) 74 $\mu$ sec  
(162.5 $\mu$ sec)



(c) 86 $\mu$ sec  
(175 $\mu$ sec)

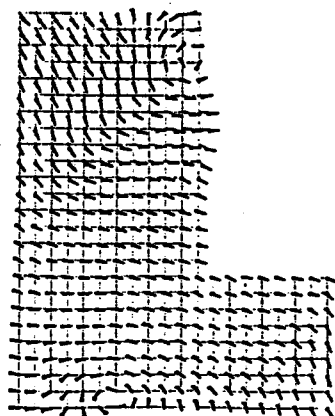


図-5.2.6 モデルD4の等最大せん断応力線図 (左) と粒子速度ベクトル図 (右)  
 $\gamma = 36.4^\circ$

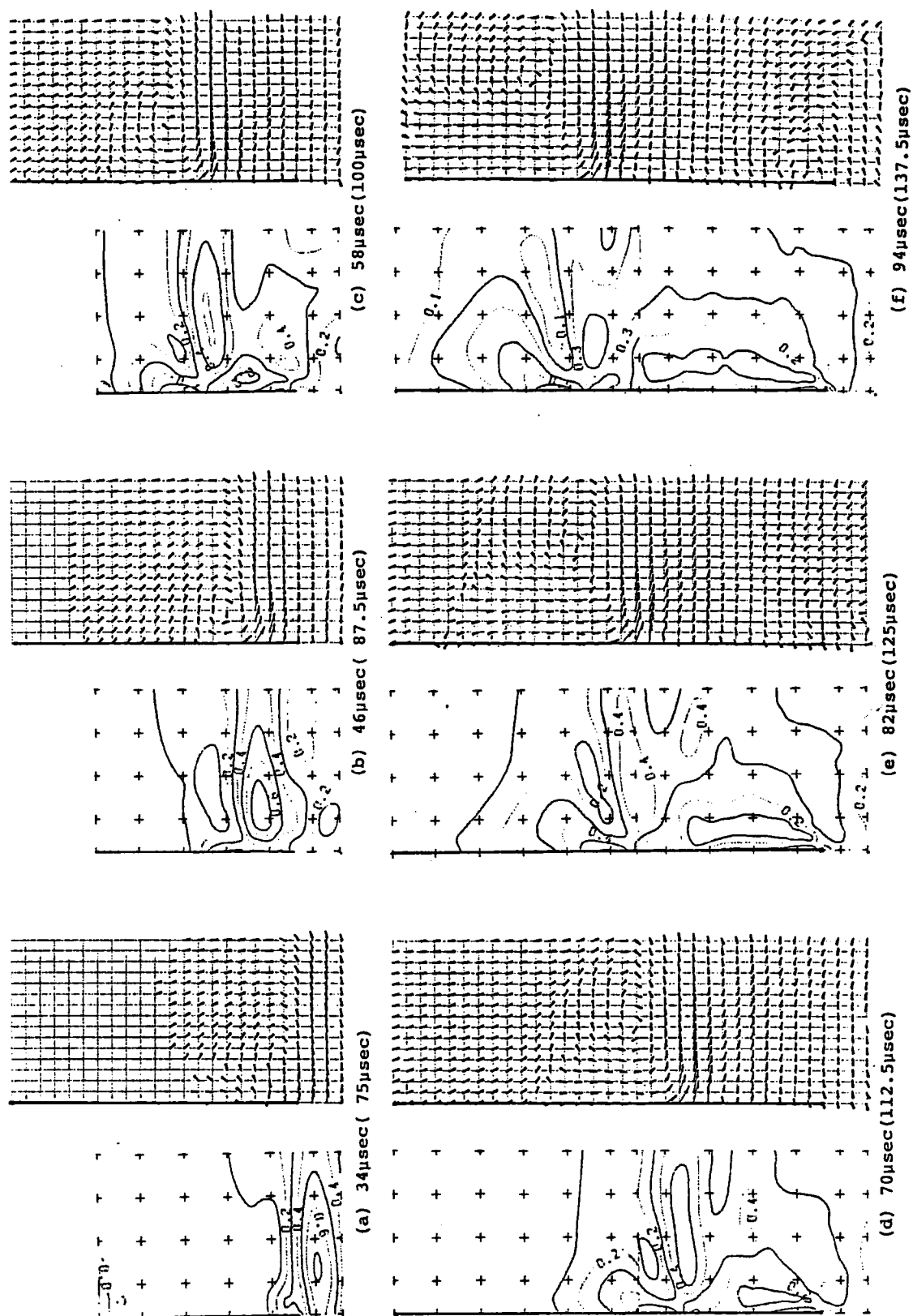
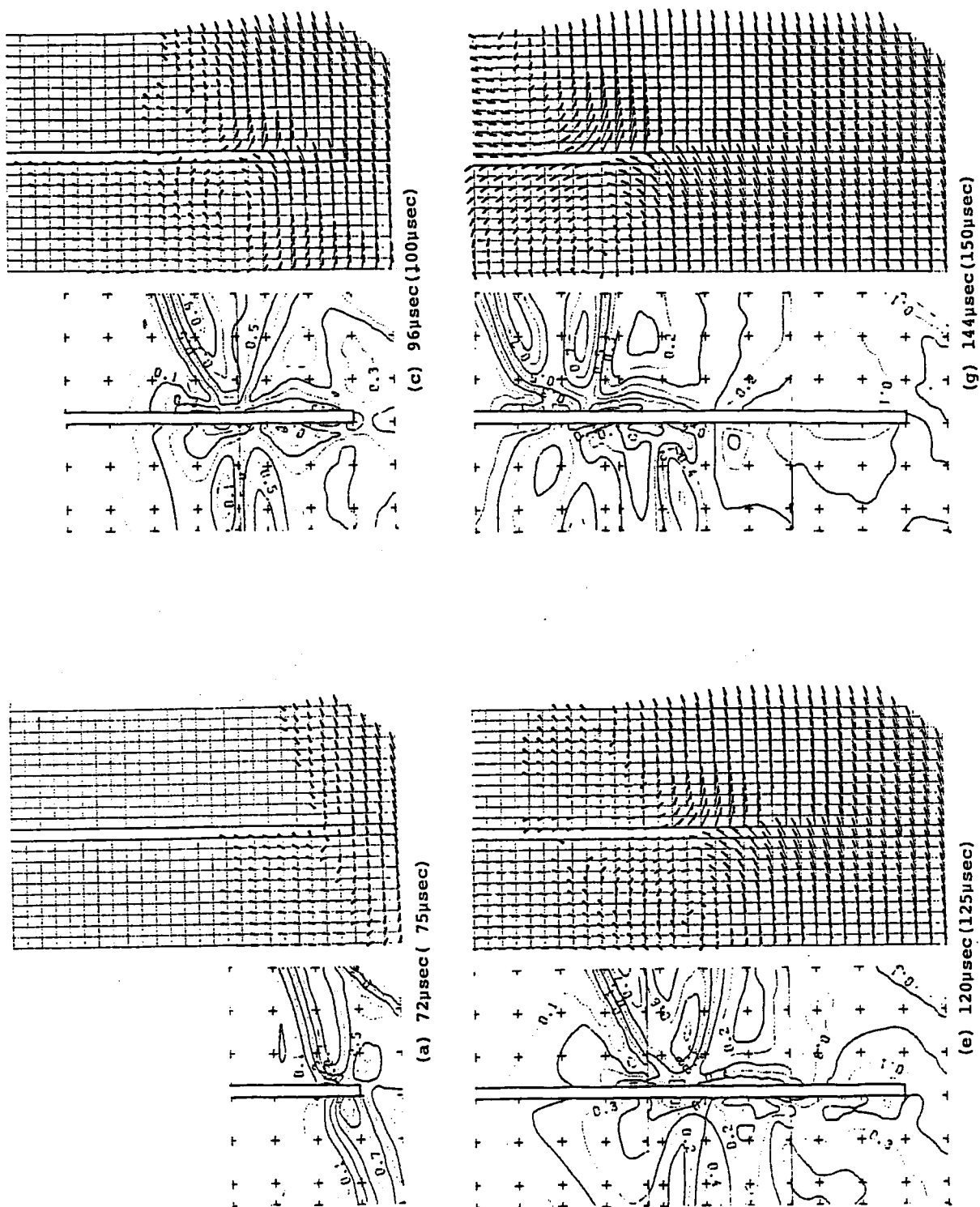


図-5.2.7 モデルD5の等最大せん断応力線図 (左) と粒子速度ベクトル図 (右)  
スリット側面への入射角  $\gamma = 90^\circ$



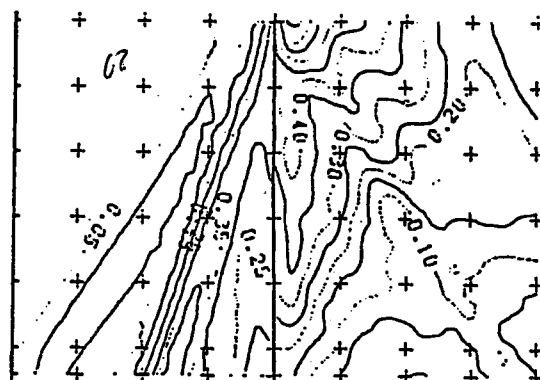


図一5.2.8 モデルD7の等最大せん断応力線図 (左) と粒子速度ベクトル図 (右)  
スリット側面への入射角  $\gamma = 71.8^\circ$

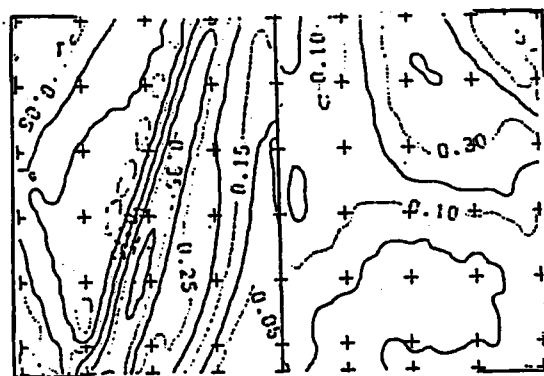
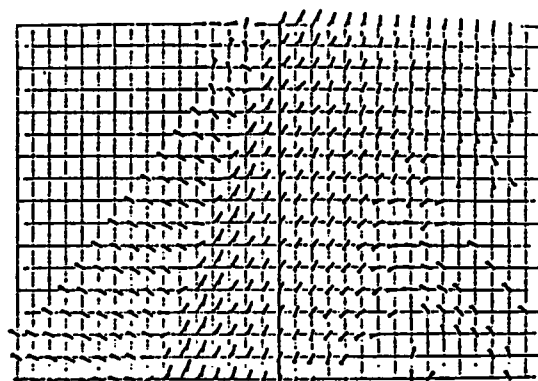
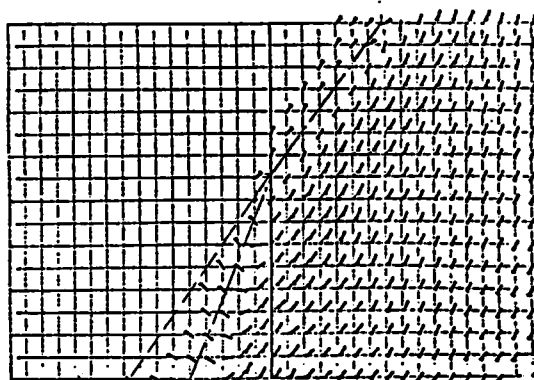




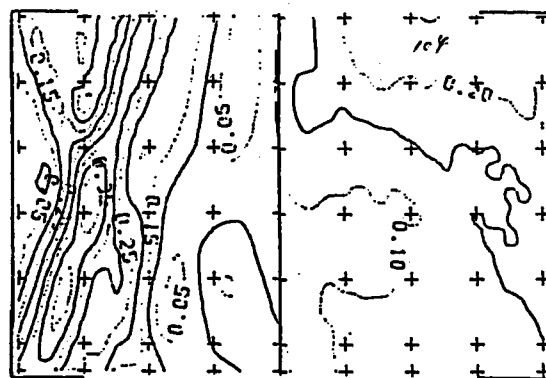
50 $\mu$ sec (125 $\mu$ sec)



68 $\mu$ sec



86 $\mu$ sec



104 $\mu$ sec

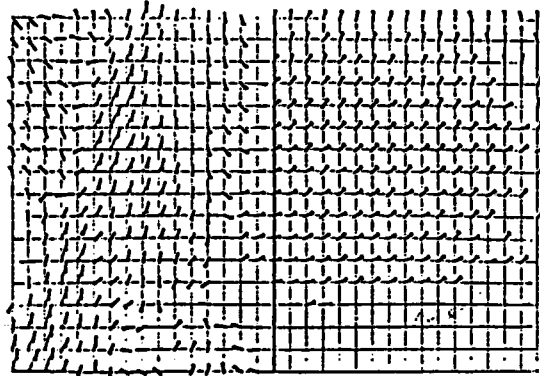
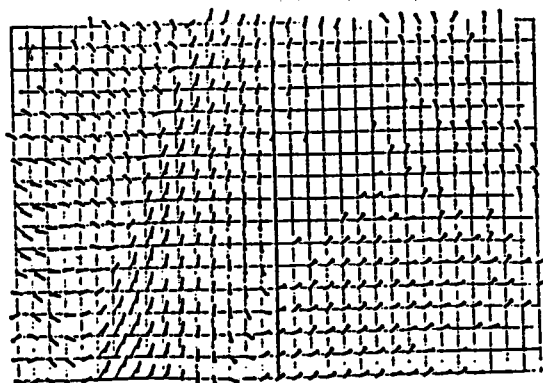
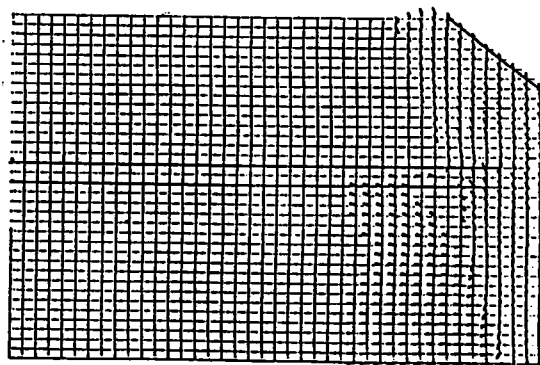
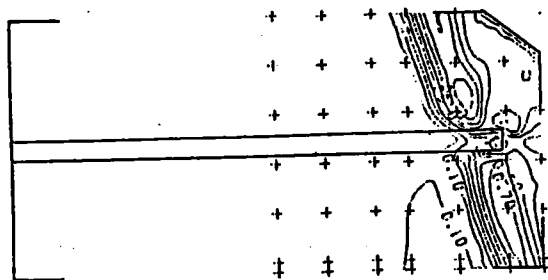


図-5.2.10 モデルD10の等最大せん断応力線図(上)と粒子速度ベクトル図(下)  
 $\gamma = 36.4^\circ$

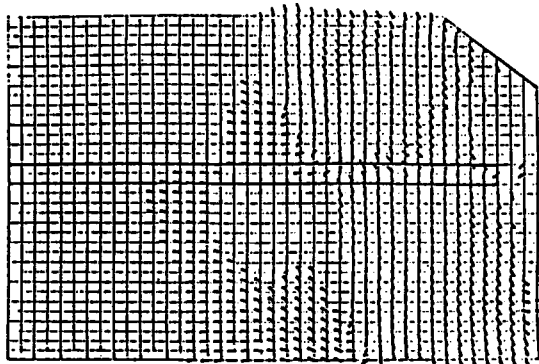
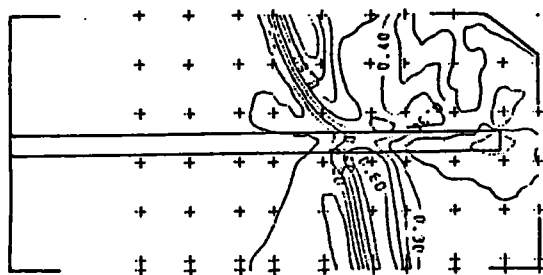




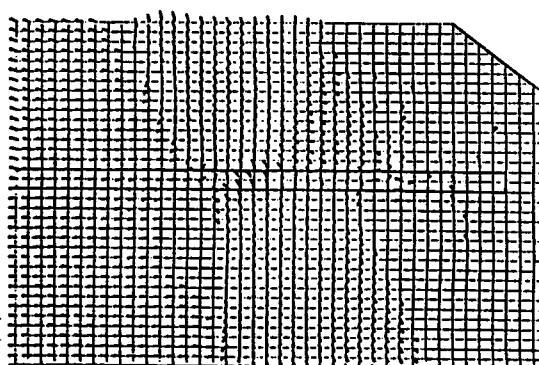
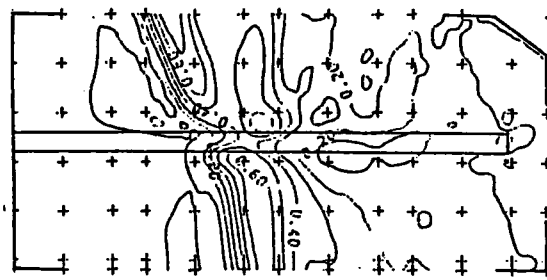
74 $\mu$ s(87.5 $\mu$ s)



98 $\mu$ s(112.5 $\mu$ s)



122 $\mu$ s(137.5)



146 $\mu$ s(162.5 $\mu$ s)

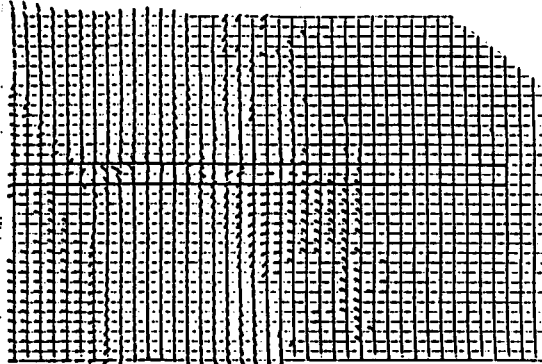
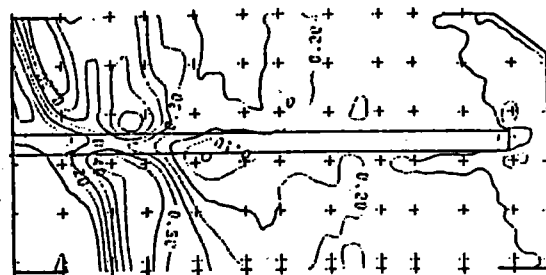


図-5.2.13 モデルD13の等最大せん断応力線図(左)と粒子速度ベクトル図(右)  
スリット側面への入射角  $\gamma = 71.8^\circ$

## 第 6 章 結 論

第 5 章までに扱った各章の主題の結果については、それぞれの章の結論に述べている。ここでは、本研究の主題についての結論を以下にまとめる。

本研究は、波動挙動を動光弾性実験によって究明する際に重要な、下記の事項に関する基礎資料を得ることを目的とした。

- (1) 実験装置などの問題点
- (2) 実験結果の解釈上の問題点
- (3) 波動問題への適用性と今後の展望

以下にそれぞれの項目についてまとめる。

### 1) 実験装置などの問題点

本研究で行なった動光弾性実験結果から、実験装置などに関わる問題点は以下のように分類できる。

#### (1) 高速撮影系

図-3.2.5 で示したように、二次元動光弾性実験装置の主要部は撮影系と光源系にあるから、両者を含めて高速撮影系と呼ぼう。この高速撮影系は光源とカメラの組合せによっていろいろな特性がある。高速駒撮りカメラを用いる場合は光源系とトリガー系は比較的単純であるし、光シャッターを用いる場合はカメラは比較的単純であるが光源系とトリガー系が複雑である。

本研究の場合、どちらも能力は十分ではないが両者の方式の高速撮影系を用いてそれぞれの特徴を示した。その結果、高速カメラ系は露出時間と駒間隔に注意し、繰り返し入力系は線形現象に対して再現性が保たれるように注意すれば、高速現象の撮影に対して実用的であることが示された。

現在開発されている最高の能力を持つ装置であれば、どちらの撮影系であってもより明快で詳細な等色線縞模様写真が得られた可能性が大きい。しかし、使用条件および稼働性を考慮すると、目的によってはそれらの能力の高い撮影系が必ずしも実用的に優れているとは限らない。

動光弾性実験が広く行なわれるためには、何時でも、何処でも、誰でも実行できることが重要な条件である。特に、ここで用いた繰り返し入力法は、その意味で一定の目的に対しては大変便利で実用的であると考えられる。

#### (2) 荷重系と模型材料

実験装置としては見過ごされがちであるが、動光弾性実験を波動問題に適用する場合には、荷重系と光弾性模型材料も考慮されるべき重要な要素である。

荷重系は、ここで行なったような平面波を必要とする場合であれ、また爆薬による集中衝撃力を用いる場合であれ、必ず一定以上（ときには一定以下）の応力レベルを持ちしか

も一定以下の継続時間を持つパルスを発生するものでなければならない。

一方、これらの要請の範囲は使用する模型材料にも依存する。すなわち、模型内に入力されるパルスは、十分な精度で読み取れるだけの繰回数を持つ光弾性縞模様を発生し、使用する高速撮影系で明瞭な像が得られる程度の伝播速度であって、しかも注目する領域に不必要な反射波が現われない間に独立した現象を完了する継続時間を持たなければならない。これらはいずれも模型材料の動特性に左右される。さらに、模型材料の性質は弾性波動以外を目的とするのでなければ、対象とする波動のひずみ速度とひずみレベルに対して十分弾性的であることが望ましい。

本研究における入射パルスは、高速カメラ系の場合は形および応力レベルともに妥当な範囲にあったが、繰り返し入力系の場合には応力レベルがやや不足し、パルス形に望ましくない振動的な成分が含まれており、衝撃方法と共に今後の課題として残されている。

今日までの動光弾性実験の発達史は、高速撮影系を含めてこれらの互いに相反する要請を克服する過程そのものでもあった。たとえば、波動の伝播速度の遅い材料を用いると、同じパルスの継続時間でも速い材料よりパルス長は短く、高級な高速撮影系を用いなくとも分解能の優れた鮮明な像が得られるが、そのような材料は一般に粘弾性性質が顕著であることが多い。本実験に採用した模型材料のE p - IIおよびE p - IIIにもこの点に問題が残されている。この意味で優れた模型材料を開発することは、非均質模型を対象にする場合の動光弾性実験における一つの課題であろう。

### (3) 等色線縞模様写真の視野

一般に、繰り返し入力法以外の高速撮影系の視野は固定されている。波動実験においては予め十分な視野を得るように準備されるが、本実験の高速カメラ系のようなカメラに固有の長方形の視野しか使用できない場合には、解析に必要な波動伝播過程の一部が視野に含まれなくなることが生ずることは避けられない。視野内に全現象を納める一つの方法は、注目領域を極めて狭くすることであろうが、同時に撮影間隔および使用するパルス長も短くしなければならないから別の障害が発生する。

繰り返し入力系であれば、写真-4.2.12などで示したように、必要な現象の領域のみを視野を移動しながら追跡でき、さらに撮影間隔さえ任意の選べるので、再現性のある現象に対しては適用性が高いと判断できる。

### (4) 写真処理

本研究では、撮影されたカラーフィルムは全て業者に依頼して現像およびプリントをした。その過程でフィルム毎に色調が一定でない場合があり、特にプリントでは色調に大きな差が出易い。また、大量の写真を編集、選別、保存、検索するために意外に手数がかかる。これらは実験の主要部ではないが、欠くことのできない作業であるから便利で組織的な方法が望まれる。

一つの方法はイメージコンバーターを活用し、上記の操作を簡素化することであろう。現在の能力はここで対象にしたような高速撮影には採用できないが、将来はこの機器が不



可欠となると考えられる。

## 2) 実験結果の解釈上の問題点

動光弾性実験の結果を解釈する上での問題点は、上記1)で述べた実験装置と方法に密接に関係している。その関係のあり方と問題点は以下のように分けられよう。

### (1) 等色線縞模様写真の分解能

静的光弾性実験においては、応力成分を知るために等色線縞模様と等傾線を記録することはすでに述べた。しかし、通常の動光弾性実験では主応力差に比例する縞次数で形成された等色線縞模様が得られる全てであるから、この写真のみから波動挙動に関する全ての情報を得なければならない。

変位成分、応力成分などが未知のまま、等色線縞模様（等最大せん断応力線図）のみをもとに波動挙動を解明する立場では、まずこの等色線縞模様が縞次数を含めて正確に表現されている必要がある。この意味で撮影された像の分解能は動光弾性実験において極めて重要である。

一方、理論的に波動の種類に対応して波面の形、波面の角度、伝播速度、主応力差の符号、主応力差の増減の方向などが予想できる場合には、得られた等色線縞模様の時間的変化と縞次数の増減方向をもとに波動の種類を判断し、縞次数をもとに応答の大きさ（主応力差）を求めることになる。

①縞次数の増減： 立ち上がりの鋭いパルスに対しては、その部分の縞模様が密に現われるから、一駒の露出時間によってはこの部分の写真上の分解能が低下し、特に、複雑な縞模様部分の縞次数の増減が読みとりにくい場合が生ずる。単色光の写真の場合には、等色線縞は明暗の縞模様のみである（暗視野の場合0, 1, 2・・・次も暗線である）から縞次数の増減は特に判定が難しい。本実験の場合はカラー写真による等色線縞模様であり、表-3.4.1に示したように、縞次数の増減の判定は縞模様を構成する色の変化順序によって容易にかつ正確に行える。ただし、第4章で示した写真全体から判断されるように、カラー写真をプリントする段階で色調が一定しない場合があり、表-3.4.1にこだわらず色と縞次数を駒毎に相対的に判断する必要がある。

②暗点と暗線： 光弾性縞模様において暗点のもつ意味は重要で<sup>6-1)</sup>、静的実験においても等傾線とともにしばしば問題となる点である。動光弾性実験の場合も重要な意味を持ち、たとえば、主応力差の符号が逆転する部分に現われる0次の縞次数を持つ暗点または暗線が正確に表現されないと、しばしば波動挙動を誤って解釈する恐れがある。

図-4.2.5(a)に示したRayleigh波を表現する縞模様に含まれる自由境界上の暗点はその代表例であり、第4章で示した写真-4.2.8などの等色線縞模様において、スリットの非入射側の側面に現われたRayleigh波にはこの暗点が見えない場合がある。分解能が不足しているためか、あるいはこのような場合に現われるRayleigh波の特徴であるかは現時点では断定できない。また、模型の自由境界付近に現われ易い光弾性実験に特有の初

期応力の効果により、自由境界付近の縞次数と縞模様が正確に現われない場合があり、head wave などの自由境界付近に現われる波動の判定が不正確になることもある。

上記①と②は、主として等色線縞模様による波動挙動の定性的な判定に関する問題であるが、定量的な判定に関しては状況はさらに厳しいものとなる。特に、繰り返し入力系においては上述の分解能以外に再現性の問題が加わるから、十分注意しなければならない。第4章で縞次数の値のほかに応答比を用いたのはこれらを考慮したためであるが、露出時間とパルス形によって導入される分解能の低下とそれに伴う不正確さは避けられない。

## (2) 模型材料の粘弾性性質

図-3.4.12に示したように、E<sub>p</sub>-II, IIIのみならずE<sub>p</sub>-Iにおいても粘弾性効果により伝播とともに波動の振幅が減衰する。繰り返し入力系の場合には入射パルス形が距離とともに変化し、黄銅角棒から離れた位置では入射パルスのピークの後にあった振動的な部分が滑らかになっている。入射パルスのピーク値が距離とともに変化すると、厳密には波動の経路を考慮して応答比を用いる必要があり、第4章で行なったように基準値( $N_0$ )を一定とすると定量的考察の誤差の原因となる。たとえば、自由境界の $\tau_{\max}$ の応答比についても理論的に正確な値を求めるには、模型材料の粘弾性特性を考慮した粘弾性解析を行なう必要があり、今後の課題である。

## 3) 波動問題への適用性と今後の展望

序論で述べたように、動光弾性実験を行なって波動問題を研究する歴史は他の同主旨の実験法に比較して長く、それだけに様々な観点から工夫・改良がなされ、問題によってはきわめて見事な成果が得られている。

本論文でしばしば引用した文献で、Dally らが行なったRayleigh 波に関する動光弾性実験<sup>6-2)</sup>はその一つであろう。実験的事実として視覚的に平明かつ鮮明に得られた等色線縞模様によって表現されたRayleigh 波の挙動は十分な説得力を持っている。

本実験においても、たとえば平面SV波が自由境界へ入射するとき、入射角の大きさによって発生する表面波の違いとその伝播挙動が表現される点では、視覚的な意味の説得力を持ち、このような問題に対してかなりの適用性があるものと考えられる。

ここで行なった実験結果から、もし両高速撮影系が同時に使用できるなら、E<sub>p</sub>-I程度のかかなり弾性に近い材料性質を持つ均質模型材料によって、高速カメラ系でやや長時間にわたる現象を、繰り返し入力系によってできるだけ限定された駒数でその現象の注目部分を、相補的に把握することが望ましいことが分かる。また、両者を併用することができない場合には1)で指摘した問題点を考慮し、その撮影法で十分な情報が得られる条件を整える必要があることは言うまでもない。

しかし、本研究で試みたが十分な目的を達しなかった非均質問題については、現段階では特性抵抗比が1/2以下の条件で、一般的な弾性波動問題を対象にすることは困難であろう。2)で述べた粘弾性問題として考えるか、特性抵抗値が十分低くしかも弾性性質を有

するような新しい模型材料が開発される必要がある。あるいは、特性抵抗が十分低い材料内の挙動を問題にしなくてもよいなら、その部分を透明な光弾性材料でない他の適当な材料で置き換えることも考えられる。シリコンゴムなどはその場合の候補材料となる可能性がある。しかし、接着された層境界に発生し易い初期応力の問題も生じてくる。

模型実験の対象としての波動の一般的な特性は、伝播速度が速いこと、自由境界または非均質境界で必ず反射することである。特に、後者の性質は接触型のあらゆる動的測定法において避けられない誤差の原因となる。

動光弾性実験は、使用材料は限定されるが非接触型の面的測定法の代表的な実験法であり、1) で述べたような問題点は有するが、いくつかの補足的な測定法または第5章で行なったような解析結果と併用すれば上記の波動の特性に適応でき、視覚化された実際現象の表現が可能であるという意味で優れた特徴を持つと言えよう。

今後は、波動を応用した非接触または非破壊評価、亀裂伝播などの分野で、動光弾性実験が一層利用されると期待される。

しかし、そのためには高性能の高速撮影カメラ、または再現性を必要としない現象にも適用できる Cranz-Schardin 型の撮影装置が必要であり、筆者は後者を現在計画している。上記の非破壊評価などの波動現象で最も要求されるのは、全測定時間の長さより分解能の優れた視野の広い像が得られることである。その要求には Cranz-Schardin 型の装置が最適であることは容易に理解されるであろう。

## 参考文献

### 第1章の参考文献

- 1- 1) たとえば, 小林昭一: 積分方程式法 (境界要素法) とその応用, 材料, 第32巻, 第363号, pp.1293~1303, 昭和58年.
- 1- 2) たとえば, 丹羽義次監修, 大津政康: アコースティック・エミッションの特性と理論, 森北, 1988.
- 1- 3) Love, A.E.H.: A Treatise on The Mathematical Theory of Elasticity, Dover, pp.1~31, 1944.
- 1- 4) Miklowitz, J.: The Theory of elastic Waves and Waveguides, North-Holland, pp.2~17, 1978.
- 1- 5) Graff, K.F.: Wave Motion in Elastic Solids, Clarendon Press, pp.1~8, 1975.
- 1- 6) Ben-Menahem, A. & S.J. Singh: Seismic Waves and Sources, Springer-Verlag, pp.xi~xii, 1981.
- 1- 7) 東京天文台編, 理科年表, 丸善, pp.604~616, 888~889, 1988.
- 1- 8) Whiteman, J.: A Bibliography for Finite Elements, Academic Press, 1975.
- 1- 9) 植村恒義 編: 瞬間, 共立出版, 昭和54年.
- 1-10) Herrmann, G. & N. Perrone ed.: Dynamic Response of Structure, Pergamon, pp.307~326, 1972.
- 1-11) Kolsky, H.: Stress Waves in Solids, Dover, pp.148~150, 1963.
- 1-12) Dally, J.W. & W.F. Riley: Experimental Stress Analysis, McGraw-Hill, pp.323~333, 1965.
- 1-13) 辻 二郎, 西田正孝, 河田幸三: 光弾性実験法, 日刊工業新聞社, pp.1~7, 昭和52年.
- 1-14) 応力測定技術研究会: 応力測定法, 朝倉, pp.549~594, 昭和30年
- 1-15) Durelli, A.J. & V.J. Parks: Moire Analysis of Strain, Prentice-Hall, pp.1~4, 1970.
- 1-16) 田幸敏治他編集: 光学的測定ハンドブック, 朝倉, pp.215~255, 1981.
- 1-17) 丹羽義次, 小林昭一, 佐藤 誠: 光弾性実験による衝撃応力の伝播について, 関西支部年次学術講演会概要集, pp.21~22, 昭和37年.
- 1-18) 丹羽義次, 佐藤 誠: Epoxy樹脂の静的および動的性質について, 土木学会論文集, 第152号, pp.1~8, 昭和43年.
- 1-19) 佐藤 誠, 岩原重之: 分岐構造の応力波伝播解析, 土木学会第25回年次学術講演会講演集, 第1部, pp.593~595, 1970.
- 1-20) たとえば, 岡本舜三: 耐震工学, オーム社, pp.93~124, 昭和46年.

Ref.

- 1-21) Esteve, Luis: Microzoning: Model and reality, Proc. 6th World Conf. on earthquake Engg., New Delhi, Vol.1, pp.27~43, 1977.

## 第2章の参考文献

- 2- 1) たとえば Aki, K. & P.G. Richards: Quantitative Seismology Theory and Methods, Vol.1, Freeman and Company, pp.123~137, 1980.
- 2- 1) たとえば Ewing, W.M., W.S. Jardetzky and F. Press: Elastic Waves in Layered Media, McGraw-Hill, 1957.
- 2- 3) たとえば Prager, W.: Introduction to Mechanics of Continua, Ginn and Company, 1961.
- 2- 4) Kolsky, H.: Stress Waves in solids, Dover, pp.31~44, 1963.
- 2- 5) たとえば Graff, K.F.: Wave Motion in Elastic Solids, Clarendon Press, pp.311~329, 1975.
- 2- 6) Miklowitz, J.: The Theory of Elastic Waves and Waveguides, North-Holland, pp.119~177, 1978.
- 2- 7) Eringen, A.C. & E.S. Suhubi: Elastodynamics, Vol.1, Linear Theory, Academic Press, pp.500~550, 1975.
- 2- 8) Borchardt, R.D.: Energy and plane waves in linear viscoelastic media, Jr. of Geophysical Research, Vol.78, No.14, pp.2442~2453, 1973.
- 2- 9) Achenbach, J.D.: Wave Propagation in Elastic Solids, North-Holland, pp.187~195, 1973.
- 2-10) Viktorov, I.A.: Rayleigh and Lamb Waves, Plenum Press, pp.1~7, 1967
- 2-11) Brekhovskikh, L.M.: Waves in Layered Media, Academic Press, pp.28~61, 1960.
- 2-12) Haskell, N.A.: The dispersion of surface waves in multilayered media, Bull. Seis. Soc. America, Vol.43, No.1, pp.17~34, 1953.
- 2-13) Kennett, B.L.N.: Seismic Wave Propagation in Stratified Media, Cambridge Univ. Press, pp.126~157, 1983.
- 2-14) 佐藤泰夫: 弾性波動論, 岩波, pp.113~129, 1978.
- 2-15) 佐藤 誠: 平行多層地盤に対する調和 S V 波の伝播解析, 土木学会論文報告集, 第328号, pp.57~68, 1982.
- 2-16) 日本道路協会: 道路橋示方書・同解説, V 耐震設計編, 日本道路協会, pp.88~102, 1980.
- 2-17) 運輸省港湾技術研究所, 港湾技研資料 (広島湾, 瀬戸内海西部および北九州沿岸地域の大地震時における地盤加速度), No.285, 1978.
- 2-18) 石原研而: 土質動力学の基礎, 鹿島出版会, pp.137~208, 昭和53年.

Ref.

- 2-19) 佐藤 誠：粘弾性平行多層地盤の調和 S V 波動応答，土木学会論文集 第386号／  
I -8, pp.377~386, 1987年10月.

### 第3章の参考文献

- 3- 1) Dally, J.W. : An introduction to dynamic photoelasticity, *Experimental Mechanics*, pp.409~416, 1980.
- 3- 2) Clark, J.A. & A.J. Durelli : An introduction to dynamic photoelasticity; Discussion, *Experimental Mechanics*, pp.42~48, 1980.
- 3- 3) Dally, J.W. & D. Lewis III : A photoelastic analysis of propagation of Rayleigh waves past a step change in elevation, *Bull. Seis. Soc. America*, Vol.58, No.2, pp.539~563, 1968.
- 3- 4) Marino, R.L. & J.W. Dally : Rayleigh wave propagation along curved boundaries, *Developments in Mech.*, Vol.5, Proc. of the 11th Midwestern Mech. Conf. pp.819~826, 1969.
- 3- 5) Thau, S.A. & J.W. Dally : Subsurface characteristics of the Rayleigh wave, *Int. Jr. Engng Sci.*, Vol.7, pp.37~52, 1969.
- 3- 6) Lewis, D. & J.W. Dally : Photoelastic analysis of Rayleigh wave propagation in wedges, *Jr. Geophysical Research*, Vol.75, No.17, pp.3387~3398, 1970.
- 3- 7) Riley, W.F. & J.W. Dally : A photoelastic analysis of stress wave propagation in a layered model, *Geophysics*, vol.31, No.5, pp.881~899, 1966.
- 3- 8) Daniel, I.M. & R.L. Marino : Wave propagation in layered model due to point-source loading in low-impedance medium, *Experimental Mechanics*, pp.210~216, 1971.
- 3- 9) Daniel, I.M. : Experimental methods in applied mechanics, *Jr. Appl. Mech.*, Vol.50, pp.963~976, 1983.
- 3-10) Kobayashi, T. & J.W. Dally : A system of modified Epoxies for dynamic photoelastic studies of fracture, *Experimental Mechanics*, pp.367~374, 1977.
- 3-11) Dally, J.W. : Dynamic photoelastic studies of fracture, *Experimental Mechanics*, pp.349~361, 1979.
- 3-12) Rossmannith, H.P. & A. Shukla : Dynamic photoelastic investigation of interaction of stress waves with running cracks, *Experimental Mechanics*, pp.415~422, 1981.
- 3-13) Fu, L.S. : Mechanics aspects of NDE by sound and ultrasound, *Appl. Mech. Reviews*, Vol.35, No.8, pp.1047~1057, 1982.
- 3-14) たとえば Frocht, M.M. : Photoelasticity, Vol.1,2, John Willy, 1962.

Ref.

- 3-15) 辻 二郎, 西田正孝, 河田幸三: 光弾性実験法, 日刊工業新聞社, 昭和52年.
- 3-16) 応力測定技術研究会: 応力測定法, 朝倉, 昭和30年.
- 3-17) Post, D.: Photoelasticity, Experimental Mechanics, pp.116~192, 1979.
- 3-18) たとえば 井上達雄: 弾性力学の基礎, 日刊工業, p.100, 昭和62年.
- 3-19) 佐藤 誠, 岩原重之: 分岐構造の応力波伝播解析, 土木学会第25回年次学術講演会講演集, 第1部, pp.593~595, 1970.
- 3-20) たとえば 橋本邦之: エポキシ樹脂, 日刊工業, pp.101~118, 昭和44年.
- 3-21) たとえば 前出 2-9) pp.303~309.

#### 第4章の参考文献

- 4- 1) 前出 1- 4) pp.516~517.
- 4- 2) 前出 3-12) .
- 4- 3) 前出 3- 3) .
- 4- 4) 前出 3- 5) .
- 4- 5) 前出 2-10) pp.9~65.
- 4- 6) Viktorov, I.A.: Types of acoustic surface waves in solids (review), Sov. Phys.Acoust., Vol.25, No.1, pp.1~9, 1979.
- 4- 7) Rulf, B.: Rayleigh waves on curved surfaces, Jr.Acoust.Soc.Amer., Vol.45, No.2, pp.493~499, 1959.
- 4- 8) 前出 3- 4) .

#### 第5章の参考文献

- 5- 1) Belytschko, T. & T.J.R.Hughes: Computational Methods for Transient Analysis, North-Holland, pp.301~360, 1983.
- 5- 2) Lysmer, J. & R.L.Kuhlemeyer: Finite dynamic model for infinite media, Jr. Eng.Mech.Div., ASCE, pp.859~877, 1969.
- 5- 3) White, W., S.Valliappan, & I.K.Lee: Unified boundary for finite dynamic models, Jr.Eng.Mech.Div., ASCE, pp.949~964, 1977.
- 5- 4) Smith, W.D.: A nonreflecting plane boundary for wave propagation problems, Jr.Computational Physics, Vol.15, pp.492~503, 1974.
- 5- 5) Kolinowski, A.J. ed.: Computational Methods for Infinte Domain Media-structure Interaction, ASME, pp.183~204, 1981.
- 5- 6) Forsythe, G.G. & W.R.Wasow: Finite-Difference Methods for Partial Differential Equations, John Wiley, pp.15~42, 1960.

Ref.

- 5- 7) Richtmyer, R.D. & K.W. Morton: Difference Methods for Initial-Value Problems, 2nd ed., Interscience Publishers, pp.258~264, 1967.
- 5- 8) Ames, W.F.: Numerical Methods for Partial Differential Equations, Nelson, pp.165~201, 1969.
- 5- 9) 佐藤 誠, 直角分岐構造内の波動伝播, 土木学会論文報告集, 第265号, pp.37~46, 1977.
- 5-10) Ilan, A., A. Ungar and Z. Alterman: An improved representation of boundary conditions in finite difference schemes for seismological problems, Geophys. J. R. astr. Soc., Vol.43, pp.727~745, 1975.
- 5-11) Sato, M.: Stability conditions in finite difference approaches to visco-elastic wave equation, Mem. of the Faculty of Eng. Hiroshima Univ., Vol.6, No.2, pp.103~114, 1977.

#### 第6章の参考文献

- 6- 1) たとえば 前出 3-14) .
- 6- 2) たとえば 前出 3- 5) .



## 謝 辞

私が初めて光弾性に関わりを持ったのは、昭和36年に当時京都大学工学研究所内に研究室があった丹羽義次教授（現在は福井高等工業専門学校校長）のもとで卒業論文を書くことになったときからである。間もなくMLD-1型超高速カメラを購入していただき、当時の小林昭一助手（現在は京都大学教授工学部）にこのカメラの使用法を学び、初期の動光弾性実験のお手伝いできたことはたいへん懐かしい思い出である。それ以来京都大学を離れても何とか実験装置を工夫して常に動光弾性実験に携わってきた。

おそらくそれは、高速カメラを使って初めて撮影したストロボ光源とシャッターの開閉、ガラス棒の衝撃破壊など、いまから思えば初歩的な高速撮影であったが、苦心の光源と手作りの同期装置を用い、厳寒の最中に増感現像と焼付けのために冷たい暗室の中で苦勞した結果、マイクロ秒オーダーの現象が目前に得られたときの印象が強すぎたためであろう。この出会いがそれ以後の研究の方向を選ばせたといえよう。

国内および国外のこの道の大先輩には及びもつかないが、途中何度も迷いまた無駄な方向から引き返ししながら、細々とではあるが動光弾性実験を続けて来られたことが現在の私には一つの拠り所になっている。

しかし私の今日あるは、卒論講座でお世話になって以来ずっとご指導いただいた、恩師丹羽先生、森 忠次先生（現在は岡山大学教授工学部）、小林先生、またお会いする毎に健康を気遣っていただいた川本肱万先生（現在は名古屋大学教授工学部）、温かく見守っていただいた大村 裕先生（広島大学教授工学部）をはじめ、多数の諸先生方の懇切なご指導と親身な激励によるものであることは言うまでもない。

諸先生方に心からお礼と感謝を申し上げます。同時に今後も変わらず一層ご指導ご鞭撻いただきますようお願い致します。小林先生からいただいた本研究に関する適切な助言と有益な討議は忘れることができません。また、諸先輩および同僚からいただいた温かい激励にも深謝致します。

一方、それにもかかわらず今日まで期待に応えられなかった失礼をここに深くお詫び申し上げます。

最後に、本研究に関する実験、計算、データ整理を手伝っていただいた広島大学工学部土木工学教室、構造工学研究室の、過去、現在の多数の学生および院生の方々に感謝致します。

1989年 1月

佐 藤 誠

Ack.